

Kalkulus Elementer

Nanda Arista Rizki, M.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Mulawarman
2018

Referensi:

- 1 Dale Varberg, Edwin Purcell, dan Steve Rigdon. (2007). *Calculus*, edisi ke 9.
- 2 James Stewart. (2015). *Calculus*, edisi ke 8. Cengage Learning.
- 3 S. Donevska, B. Donevsky. (2006). *Calculus and Analytic Geometry*. Technical university of Sofia.

Pertemuan ke 1: Sistem Bilangan Real

Pertemuan ke 2: Sistem Koordinat

Pertemuan ke 3: Fungsi

Pertemuan ke 4: Limit

Pertemuan ke 5: **Kuis Evaluasi**

Pertemuan ke 6: Kekontinuan

Pertemuan ke 7: Turunan

Pertemuan ke 8: UTS

Pertemuan ke 9: Turunan

Pertemuan ke 10-12:

- a. Maksimum dan minimum
- b. Teorema Nilai Rata-rata dan aturan L'Hospital
- c. Fungsi monoton (fungsi naik dan fungsi turun)
- d. Uji turunan pertama dan kedua untuk menentukan titik ekstrim fungsi
- e. Fungsi cekung dan titik belok

Pertemuan ke 13: Kuis 2

Pertemuan ke 14:

- a. Asimtot
- b. Penggambaran grafik fungsi
- c. Penaksiran

Pertemuan ke 15: Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Kalkulus

- Kalkulus (*Calculus*) itu *calculate* atau menghitung
- Kalkulus merupakan studi tentang gerakan dan laju perubahan
- Kalkulus secara umum membahas tentang *change* (perubahan), yang meliputi limit, kontinuitas, fungsi, diferensial, integrasi, dan lain lain.

Sistem Bilangan Real

Sistem Koordinat

Fungsi

Limit

Kekontinuan

Turunan

Aplikasi Turunan

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Himpunan dan Operasi-Operasi Elementernya

Sistem Bilangan Real

Sifat-Sifat Bilangan Real

Himpunan dan Operasi-Operasi Elementernya



Himpunan adalah sekumpulan objek yang memiliki sifat keterkaitan antar anggotanya. Sifat keterkaitan tersebut dinamakan sifat himpunan.

Himpunan dituliskan didalam tanda kurung kurawal. Setiap anggota suatu himpunan disebut elemen (unsur) himpunan yang bersangkutan.

Suatu himpunan biasanya diberi nama dengan huruf besar. Sedangkan anggotanya ditulis dengan huruf kecil.

Dalam himpunan dari 10 bilangan bulat positif yang pertama, maka $\frac{3}{4}$ dan 14 tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

Misalkan C adalah himpunan bilangan real x dimana $0 \leq x \leq 1$, maka $\frac{3}{4}$ adalah elemen himpunan C dan ditulis $\frac{3}{4} \in C$.

Secara umum, $c \in C$ artinya c adalah suatu elemen (anggota) dari himpunan C . Namun jika c bukan merupakan anggota dari himpunan C , maka ditulis $c \notin C$.

Jika setiap elemen dari himpunan C_1 juga merupakan elemen dari himpunan C_2 , maka C_1 disebut subset (himpunan bagian) dari C_2 dan ditulis $C_1 \subset C_2$.

Contohnya, $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3\}$.

Jelas bahwa $A \subset B$.

Contoh lainnya,

$$C = \{1, 2, 3\}$$

ditulis $C \subset A$.

Ingat bahwa jika $C_1 \subset C_2$ dan $C_2 \subset C_1$, maka kedua himpunan tersebut memiliki elemen-elemen yang sama, ditulis $C_1 = C_2$.

Contoh Soal

Buatlah hubungan antara dua himpunan berikut:

1. $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12, \dots, 99\}$
2. $G = \{(m, n) | m + n = 4; m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3\}$ dan $H = \{(a, b) | a = 1, 2, 3; b = 1, 2, 3\}$.
Catatan: (a, b) adalah pasangan bilangan real.
3. $M = \{\text{Samsung Galaxy S9, Samsung Galaxy Note 8, Samsung Galaxy A8, iPhone 8, iPhone X}\}$, dan $N = \{\text{Produk-produk Samsung dan Apple}\}$.

Jika ada elemen-elemen himpunan C_1 yang juga merupakan elemen-elemen himpunan C_2 , maka elemen-elemen yang sama tersebut dinamakan himpunan irisan dan ditulis $C_1 \cap C_2$.

Namun jika elemen-elemen C_3 merupakan elemen dari himpunan C_1 **atau** C_2 , maka C_3 disebut himpunan gabungan dan ditulis $C_3 = C_1 \cup C_2$.

Contohnya, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 8\}$, maka $A \cap B = \{1, 2\}$ adalah irisan dari himpunan A dan B . Sedangkan $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ adalah gabungan dari himpunan A dan B .

Jika suatu himpunan C tidak memiliki elemen, maka C disebut himpunan kosong dan ditulis $C = \emptyset$. Himpunan kosong juga bisa ditulis dengan $\{\}$. Perlu diingat juga bahwa himpunan kosong \emptyset merupakan subset dari semua himpunan. Himpunan gabungan dari semua himpunan disebut himpunan semesta Ω . Jelas bahwa $\emptyset \subset \Omega$.

Himpunan komplemen adalah himpunan yang elemen-elemennya tidak ada di himpunan tersebut namun ada di himpunan semestanya. Misalkan C adalah himpunan, maka komplemennya adalah C^c .

Dalam teori himpunan, dikenal juga hukum DeMorgan. Misal C_1 dan C_2 adalah dua himpunan, maka berlaku:

$$(C_1 \cap C_2)^c = C_1^c \cup C_2^c \quad (1)$$

$$(C_1 \cup C_2)^c = C_1^c \cap C_2^c \quad (2)$$

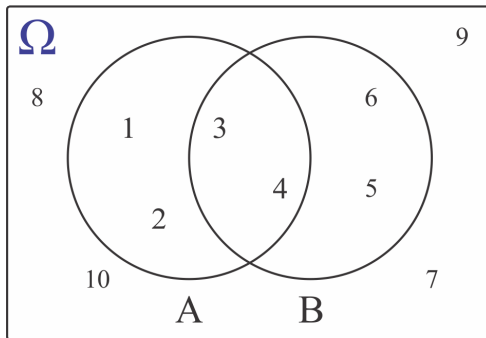
Jika $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, maka C_1 dan C_2 saling lepas.

Misalkan C_3 adalah himpunan lain, maka berlaku hukum distributif:

$$C_1 \cap (C_2 \cup C_3) = (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_3)$$

$$C_1 \cup (C_2 \cap C_3) = (C_1 \cup C_2) \cap (C_1 \cup C_3).$$

Hubungan antar himpunan dapat direpresentasikan dalam diagram Venn. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{3, 4, 5, 6\}$ dengan Ω adalah bilangan bulat dari 1 sampai 10.



Gambar: Diagram venn

Contoh Soal

4. Misalkan A adalah empat bilangan prima pertama dan B adalah faktor prima dari 10, dengan himpunan semesta $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$.

Tentukan:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A \cap B^c$
- d) $(A \cup B^c)^c$

Contoh Soal

5. Jelaskan penggunaan simbol-simbol matematika berikut:

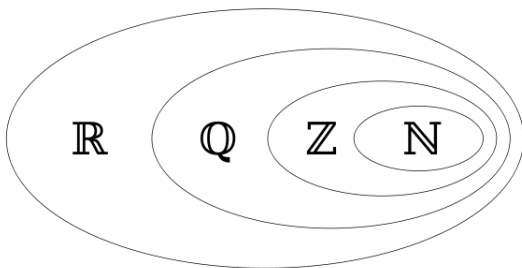
- \forall
- \exists
- $\exists!$
- \ni
- \in
- \subset
- \subseteq
- \cap
- \cup
- \mathbb{R}
- \mathbb{N}
- ∞

Sistem Bilangan Real

Kalkulus itu berdasarkan sistem bilangan Real dan sifat-sifatnya.

Sistem bilangan yang perlu diketahui

- 1 Himpunan bilangan asli (natural) disimbolkan \mathbb{N} .
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- 2 Himpunan bilangan bulat (integer) disimbolkan \mathbb{Z} .
 $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- 3 Himpunan bilangan rasional disimbolkan \mathbb{Q} .
Contohnya: $2, 1/2, -11/22, 22/7, \dots$
- 4 Himpunan bilangan real disimbolkan \mathbb{R} .
Contohnya: $0, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \pi, 2\pi, \dots$



Jelas bahwa $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Bilangan real adalah penyempurnaan dari bilangan rasional. Bilangan rasional adalah bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk pecahan

$$\frac{m}{n},$$

dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $n \neq 0$. Bilangan rasional mempunyai bentuk desimal yang berulang atau bentuk desimal yang berhenti. Contohnya:

$$\frac{2}{3} = 0,66666666\dots; \quad \frac{3}{8} = 0,375.$$

Contoh Soal

6. Tunjukkan bahwa $0,66666666\dots$ adalah bilangan rasional!

Jawab:

Contoh Soal

6. Tunjukkan bahwa $0,66666666\dots$ adalah bilangan rasional!

Jawab:

Misal $x = 0,66666666\dots$, maka

$$10x = 6,66666666\dots$$

$$10x = 6 + 0,66666666\dots$$

$$10x = 6 + x$$

$$9x = 6$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

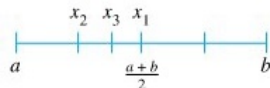
Contoh Soal

7. Apakah bilangan-bilangan berikut adalah rasional?

- 1 $0, 123123123\dots$
- 2 $4, 5678$
- 3 $8, 880880881\dots$
- 4 $5, 112233445\dots$
- 5 $\sqrt{2} = 1, 4142135623\dots$
- 6 $\pi = 3, 1415926535\dots$

Kerapatan Bil. Real

Setiap 2 bil. Real, selalu ada bil. Real lain yang berada di antaranya. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, maka $a < x_1 < b$ atau dapat ditulis $x_1 \in (a, b)$. Faktanya $x_1 \in \mathbb{R}$, maka di antara a dan x_1 juga terdapat bilangan $x_2 = \frac{(a+x_1)}{2}$ yang juga bil. Real.

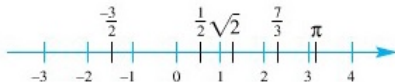


Gambar: Ilustrasi

Garis Bilangan

Terdapat korespondensi satu-satu antara \mathbb{R} dan garis lurus, bahwa setiap bilangan Real dapat digambarkan sebagai titik pada garis dan setiap titik dapat dinyatakan oleh bilangan Real.





Bilangan Real bisa digambarkan secara geometri melalui garis bilangan.








Interval (selang)

Suatu ruas garis pada garis bilangan dinamakan selang hingga. Suatu selang hingga mempunyai batas atas dan batas bawah. Selang tak hingga hanya diperoleh dalam kasus garis yang tak terbatas.

Selang yang tidak memuat titik batasnya dinamakan selang buka dan yang memuat semua titik batasnya dinamakan selang tutup.

Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x: a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x: a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x: a < x \leq b\}$	$(a, b]$	

Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x: x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x: x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x: x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x: x > a\}$	(a, ∞)	
\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	

Contoh soal

8. Tentukan himpunan penyelesaian ketidaksamaan berikut dan nyatakan dalam notasi selang!
- a) $2x - 5 \leq 4x - 3$
 - b) $-2 < 4x - 3 < 9$
 - c) $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
 - d) $4x^2 - 5x - 6 < 0$.

Pertidaksamaan

Aksioma urutan

Pada \mathbb{R} terdapat himpunan $P \subseteq \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1. Jika $a \in \mathbb{R}$, maka atau $a = 0$, atau $a \in P$, atau $-a \in P$.
2. Jika $a, b \in P$, maka $a + b \in P$ dan $ab \in P$.

Dalam hal ini P adalah himpunan bilangan positif.

Secara umum, jika $x < y$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$. Maka $y - x$ adalah bilangan positif atau ditulis $y - x > 0$. Dalam hal ini, $x < y$ artinya sama dengan $y > x$.

Contohnya $1 < 2$, maka $2 - 1 = 1 > 0$. Oleh karena itu pada garis bilangan real, angka 1 berada disebelah kiri angka 2.

Teorema

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$,

① pasti berlaku salah satu berikut:

- $a < b$
- $a = b$
- $a > b$.

② jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ (sifat transitif).

③ $a < c \Leftrightarrow a + b < c + b$ (tidak memperhatikan nilai b).

④ $a > 0, b < c \Leftrightarrow ab < ac$
 $a < 0, b < c \Leftrightarrow ab > ac$.

⑤ Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.

⑥ Jika $0 < a < b$ atau $a < b < 0$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Nilai Mutlak

Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Harga mutlak dari x , ditulis

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Contohnya $|-1| = 1$, $|2| = 2$, $|0| = 0$.

Arti geometri dari $|x|$ adalah jarak x ke 0 pada garis real \mathbb{R} . Perlu diingat bahwa jarak dari x ke y pada garis bilangan adalah $|x - y|$.

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

1. $\sqrt{a^2} = |a|$

2. untuk $c > 0$,

- $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c \Leftrightarrow a^2 \leq c^2$

- $|a| \geq c \Leftrightarrow a \geq c \text{ atau } a \leq -c \Leftrightarrow a^2 \geq c^2$

3. $|ab| = |a||b|$

4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketidaksamaan segitiga)

6. $|a - b| \geq ||a| - |b||$ (ketidaksamaan segitiga)

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x - 2|$?

Jawab:

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x - 2|$?

Jawab:

$$\begin{aligned} |x - 2| &= \begin{cases} -(x - 2), & (x - 2) < 0 \\ (x - 2), & (x - 2) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x - 2|$?

Jawab:

$$\begin{aligned} |x - 2| &= \begin{cases} -(x - 2), & (x - 2) < 0 \\ (x - 2), & (x - 2) \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2 - x, & x < 2 \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Sebagai ilustrasi, misal $x = -\frac{1}{2}$. Karena $x < 2$, maka

$$\left| -\frac{1}{2} - 2 \right| = 2 - \left(-\frac{1}{2} \right) = 2\frac{1}{2}$$

atau $|x - 2| = \left| -\frac{1}{2} - 2 \right| = \left| -2\frac{1}{2} \right| = 2\frac{1}{2}$.

Contoh Soal

10. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1!$

Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$!

Jawab:

Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2.$$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dari dua interval yaitu

$$\left(-\infty, \frac{4}{3}\right] \cup [2, \infty).$$

Contoh Soal

11. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tunjukkan bahwa

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon.$$

Jawab:

Contoh Soal

11. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tunjukkan bahwa

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon.$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} &\Leftrightarrow 5|x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5||x - 2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5(x - 2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5x - 10| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tentukan bil. positif δ sedemikian sehingga

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon.$$

Jawab:

Contoh Soal

12. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tentukan bil. positif δ sedemikian sehingga

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon.$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |6x - 18| < \varepsilon &\Leftrightarrow |6(x - 3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 6|(x - 3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Maka $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ atau lebih tepatnya $\delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Contoh Soal

Tentukan nilai x jika:

13. $|x - 2| \leq \frac{3}{2}$.

14. $|2x + 3| \leq |x - 3|$.

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |5x - 10| < 1.$$

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < 24.$$

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < 24.$$

Jawab:

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < 24$$

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 3| < 4$$

$$-\delta < x - 2 < \delta \Rightarrow -4 < x - 3 < 4$$

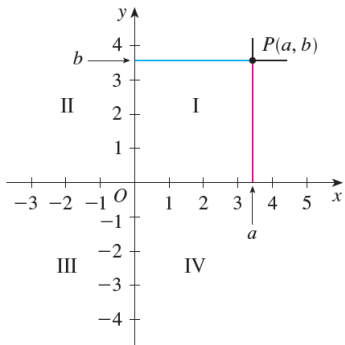
$$-\delta - 1 < x - 3 < \delta - 1 \Rightarrow -4 < x - 3 < 4.$$

Maka haruslah $-\delta - 1 > -4$ dan $\delta - 1 < 4$, diperoleh $\delta < 3$ dan $\delta < 5$. Oleh karena itu pilih $\delta < 3$.

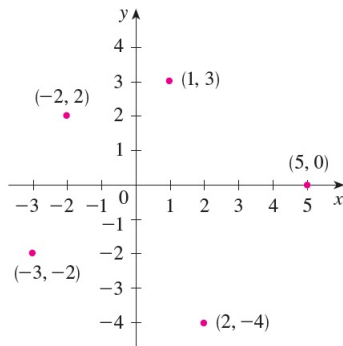
Sistem Koordinat

Titik dalam suatu bidang dapat diidentifikasi dengan pasangan terurut dari bilangan-bilangan real. Bilangan-bilangan real tersebut diurutkan dalam garis real, sehingga pasangan terurutnya terbentuk dari dua garis real. Biasanya, dua garis real tersebut diposisikan untuk berpotongan di titik asal O .

Misalkan dalam suatu bidang, terdapat titik (yang bernama) P yang diletakkan di pasangan (a, b) . Dalam hal ini, a disebut koordinat x dari P dan b disebut koordinat y dari P . Titik P disimbolkan dengan $P(a, b)$.



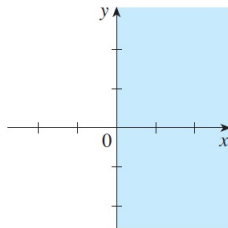
Beberapa titik juga dapat dilabeli dengan koordinatnya seperti gambar berikut



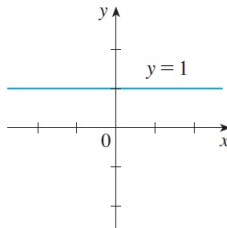
Walaupun notasi yang digunakan sama dengan interval selang buka, namun dapat dikenalnya dari konteks makna yang dimaksud.

Sistem koordinat tersebut dinamakan **sistem koordinat Kartesius**, yang dikenalkan oleh matematikawan Perancis bernama René Descartes (1596-1650). Suatu bidang dalam sistem koordinat ini disebut **bidang Kartesius** yang dinyatakan oleh \mathbb{R}^2 . Sumbu x dan sumbu y dalam sistem koordinat ini disebut sumbu koordinat, dan dibagi menjadi 4 kuadran (yang dilabeli I, II, III, dan IV).

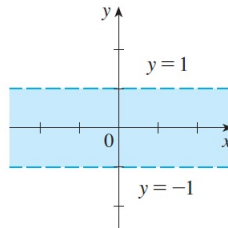
Berikut skema daerah yang didefinisikan oleh himpunan pasangan titik.



$$\{(x, y) \mid x \geq 0\}$$



$$\{(x, y) \mid y = 1\}$$



$$\{(x, y) \mid |y| < 1\}$$

Contoh Soal

Sketsalah daerah yang didefinisikan oleh:

1. $\{(x, y) \mid -1 \leq x < 3\}$!
2. $\{(x, y) \mid -\infty < y \leq 3\}$!
3. $\{(x, y) \mid -1 < x < 3, -1 < y < 3\}$!
4. $\{(x, y) \mid -2 < x + y < 6\}$!

Misalkan diberikan dua titik, yaitu $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$. Maka jarak antara dua titik tersebut adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

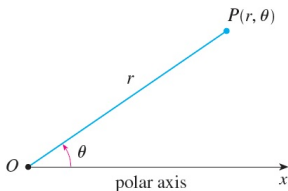
Contoh Soal

Buatlah suatu koordinat kartesius, lalu tentukan jarak antara dua titik berikut:

5. $A(0, 0)$ dan $B(4, 5)$.
6. $C(-3, -4)$ dan $D(3, 4)$.
7. $E(2, -5)$ dan $F(-5, 2)$.
8. $G(-6, -7)$ dan $H(-8, -7)$.

Sistem Koordinat Kutub (Polar)

Sistem koordinat selanjutnya adalah sistem koordinat kutub, yang dikenalkan oleh Newton. Dimulai dari memilih titik *pole* (atau asal) dalam bidang yang dilabeli dengan O . Lalu menggambarinya dari titik O yang disebut *polar axis*. Biasanya *polar axis* (sumbu kutub) digambar secara horisontal ke kanan.



Jika P adalah titik lain dalam bidang tersebut, r menyatakan jarak dari titik O ke titik P , dan θ adalah sudut antara sumbu kutub dan garis OP ; Maka titik P dinyatakan oleh pasangan terurut (r, θ) , dan disebut koordinat kutub dari P .

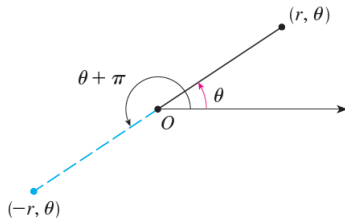
Sistem koordinat ini menggunakan sudut yang dapat diukur baik dalam satuan derajat maupun radian (rad). Dalam hal ini,

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

Derajat	0°	30°	45°	60°	90°	120°
Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$

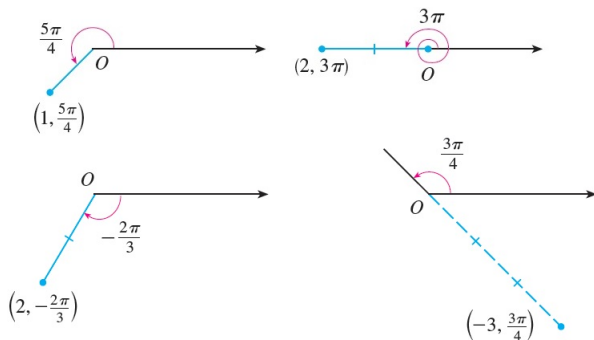
Derajat	135°	150°	180°	270°	360°
Radian	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Biasanya ada kesepakatan bahwa suatu sudut itu positif jika diukur dalam arah yang berlawanan dengan arah jarum jam, dan bernilai negatif jika diukur sebaliknya. Jika $P = O$, maka $r = 0$ dan titik $(0, \theta)$ menyatakan *pole* (kutub) untuk setiap θ .

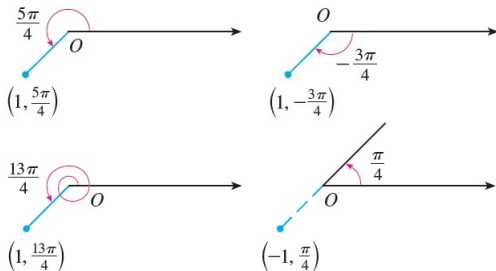


Titik $(-r, \theta)$ dan (r, θ) berada pada garis yang sama yang melalui titik O dan kedua titik tersebut memiliki jarak yang sama dari O (yaitu $|r|$), namun berlawanan arah. Catatan: titik $(-r, \theta)$ menyatakan titik yang sama dengan titik $(r, \theta + \pi)$.

Berikut adalah contoh titik dan koordinat kutubnya.



Dalam sistem koordinat Kartesius, setiap titik hanya memiliki satu representasi. Namun dalam sistem koordinat kutub, setiap titik memiliki banyak representasi.



Karena satu putaran penuh dinyatakan oleh sudut 2π , maka titik (r, θ) dapat dinyatakan oleh

$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ dan } (-r, \theta + (2n + 1)\pi),$$

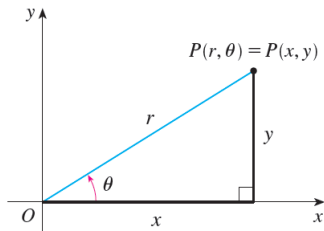
dengan $n \in \mathbb{Z}$.

Contoh Soal

Buatlah dalam koordinat kutub jika diketahui

9. titik $I(2, \frac{2\pi}{3})$.
10. titik $J(\sqrt{4}, -\frac{\pi}{4})$.
11. $r = 1$.
12. $\theta = \pi/3$.

Hubungan antara Sistem Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub



Jika titik P memiliki koordinat Kartesius (x, y) dan koordinat kutub (r, θ) , maka

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \text{ dan } \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

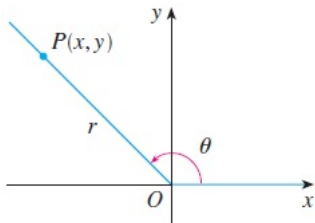
Sehingga berlaku

$$x = r \cos \theta, \text{ dan } y = r \sin \theta.$$

Walaupun persamaan tersebut diperoleh dari ilustrasi gambar bahwa $r > 0$ dan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, namun juga berlaku untuk semua nilai r dan θ . Oleh karena itu, berlaku juga

$$r^2 = x^2 + y^2, \text{ dan } \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

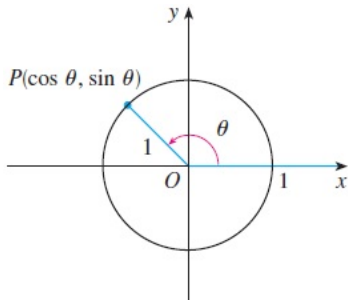
Dari gambar berikut,



diperoleh

$$\begin{aligned}\sin \theta &= y/r, & \csc \theta &= r/y \\ \cos \theta &= x/r, & \sec \theta &= r/x \\ \tan \theta &= y/x, & \cot \theta &= x/y.\end{aligned}$$

Jika jarak $|OP|$ diwakili oleh $r = 1$, maka koordinat titik P dalam gambar di bawah ini adalah $(\cos \theta, \sin \theta)$.



Contoh Soal

13. Ubah titik $(2, \frac{\pi}{3})$ dari koordinat kutub ke koordinat Kartesius!

Jawab:

Contoh Soal

13. Ubah titik $(2, \frac{\pi}{3})$ dari koordinat kutub ke koordinat Kartesius!

Jawab:

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Sehingga titik tersebut menjadi $(1, \sqrt{3})$ dalam koordinat Kartesius.

Contoh Soal

14. Representasikan titik koordinat Kartesius $(1, -1)$ ke dalam koordinat kutub!

Jawab:

Contoh Soal

14. Representasikan titik koordinat Kartesius $(1, -1)$ ke dalam koordinat kutub!

Jawab:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -1.$$

Karena $(1, -1)$ berada dalam Kuadran IV, maka dapat dipilih $\theta = -\frac{\pi}{4}$ atau $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

Contoh Soal

15. Buatlah dalam koordinat kartesius jika diketahui $r = \frac{3}{\sin \theta}!$
Jawab:

Contoh Soal

15. Buatlah dalam koordinat kartesius jika diketahui $r = \frac{3}{\sin \theta}$!

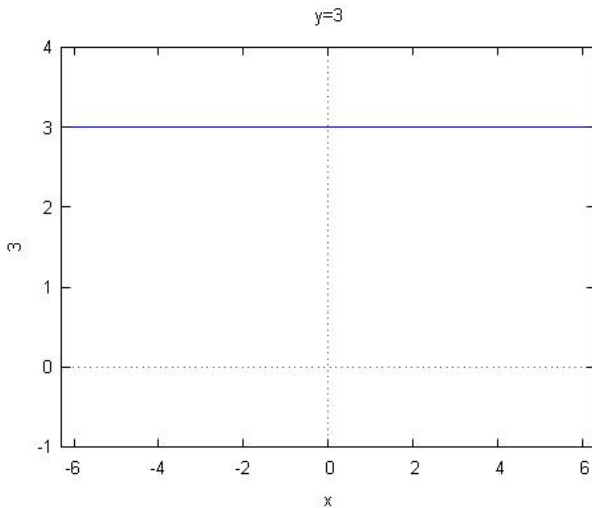
Jawab:

$$x = r \cos \theta = \frac{3 \cos \theta}{\sin \theta}$$
$$y = r \sin \theta = 3.$$

Atau dapat juga dibuktikan bahwa

$$r = \frac{3}{\sin \theta} \Rightarrow r \sin \theta = y = 3.$$

Namun nilai x tidak terdefinisi ketika $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



Hasil Kali Kartesian

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Hasil kali kartesian A dengan B adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, ditulis

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $C = \{1, 2, 3\}$, maka

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Himpunan ini bersifat terurut karena $(a, 1) \in A \times B$ namun $(1, a) \notin A \times B$.

Bidang XOY dapat dipandang sebagai hasil kali kartesian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dan dikenal sebagai sistem koordinat kartesius di \mathbb{R}^2 .

Secara umum, hasil kali kartesian A_1, A_2, \dots, A_n didefinisikan sebagai

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

dinamakan n -pasangan terurut. Dalam kasus $A_i \in \mathbb{R} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, himpunan ini dikenal sebagai sistem koordinat berdimensi n .

Relasi

Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan bagian tak kosong dari hasil kartesian $A \times B$. Secara matematis ditulis

$$R \subseteq A \times B, R \neq \emptyset.$$

Pasangan (x, y) dari relasi R dapat ditulis dalam bentuk xRy , yang berarti x berelasi dengan y .

Domain dan Range

Daerah asal (*Domain*)

Domain relasi $R \subseteq A \times B$ adalah himpunan

$$D_R = \{x \in A : xRy, y \in B\}.$$

Daerah hasil (*Range*)

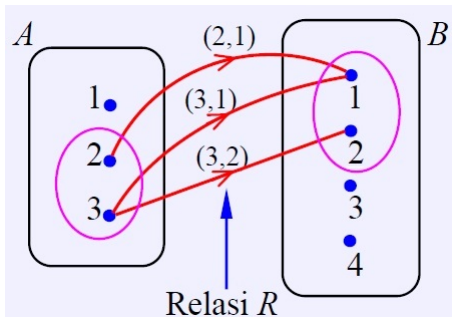
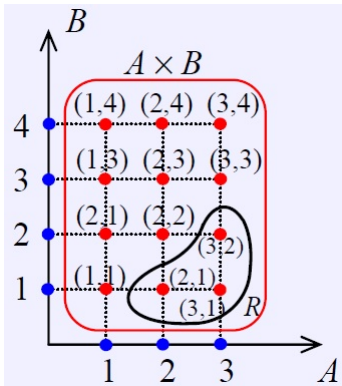
Range relasi $R \subseteq A \times B$ adalah himpunan

$$R_R = \{y \in B : xRy, x \in A\}.$$

Sebagai contoh, misalkan relasi R dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan $R = \{(x, y) : x > y, x \in A, y \in B\}$ adalah

$$\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Maka, $D_R = \{2, 3\}$ dan $R_R = \{1, 2\}$.



Fungsi

Fungsi $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ dengan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $B \subseteq \mathbb{R}$, dinamakan fungsi real, adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap anggota di himpunan A dengan **tepat satu** (satu dan hanya satu) anggota di B .

Himpunan A dinamakan daerah asal atau *domain* fungsi f , ditulis D_f . Elemen $y \in \mathbb{R}$ yang terkait dengan $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ dinamakan peta (*range*) dari x dan ditulis $f(x)$.

Elemen $x \in A$ dinamakan peubah bebas dan y yang bergantung dari x dinamakan peubah tak bebas. Himpunan semua $f(x)$ jika $x \in A$, dinamakan daerah nilai fungsi f dan ditulis R_f .

Lambang $y = f(x)$ yang menyatakan y terkait dengan x dinamakan aturan fungsi. Dalam kasus aturan fungsi $y = f(x)$ diberikan terlebih dahulu, maka *domain* fungsi f adalah

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R}\}$$

dan daerah nilainya adalah

$$R_f = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in D_f\}.$$

Grafik fungsi (kurva) $y = f(x)$ adalah himpunan titik

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in D_f \text{ dan } y \in R_f\}.$$

Fungsi Surjektif

Fungsi Surjektif

Fungsi $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ dikatakan surjektif jika $R_f = f(A) = B$. Sifat dari fungsi ini adalah

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \ni f(x) = y.$$

Fungsi Injektif

Fungsi Injektif

Fungsi $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ dikatakan injektif jika

$$\forall u, v \in A, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v.$$

Kondisi ini setara dengan

$$\forall u, v \in A, u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v).$$

Fungsi Bijektif

Fungsi Bijektif

Fungsi $f : A \rightarrow B, f(x) = y$ dikatakan bijektif jika f fungsi surjektif dan injektif.

Contoh Soal

1. Jika diketahui

$$A = \{\text{Annisa, Baby, Claudia, Debby, Endah}\}$$

$$B = \{\text{Samarinda, Balikpapan, Bontang}\}.$$

Tentukan $A \times B$!

Contoh Soal

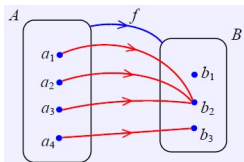
2. Misalkan diketahui:

- Annisa dan Baby pernah pergi ke Samarinda dan Bontang.
- Claudia dan Endah pernah pergi ke Samarinda dan Balikpapan.
- Debby dan Claudia pernah pergi ke Samarinda dan Bontang.

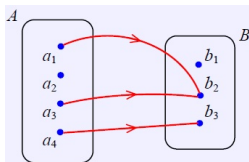
Buatlah relasinya!

Contoh Soal

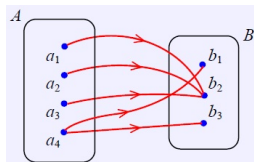
3. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi?



(a)



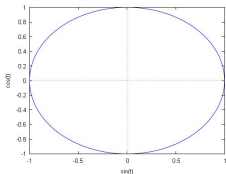
(b)



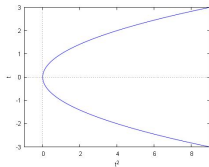
(c)

Contoh Soal

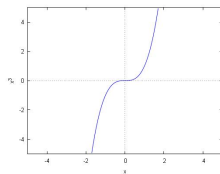
4. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi?



(a)



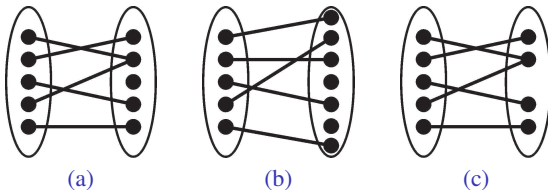
(b)



(c)

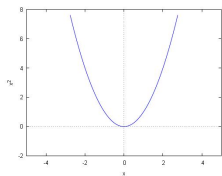
Contoh Soal

5. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi surjektif?

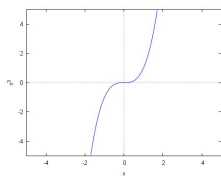


Contoh Soal

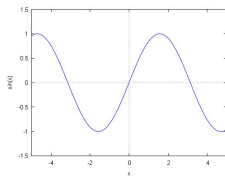
6. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi surjektif?



(a) $R_f = (-\infty, \infty)$



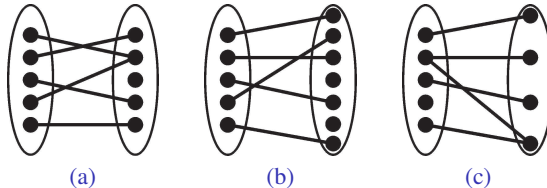
(b) $R_f = (-10, 10)$



(c) $R_f = (-10, 10)$

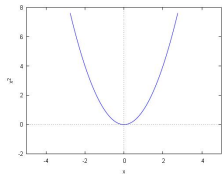
Contoh Soal

7. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif?

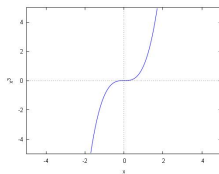


Contoh Soal

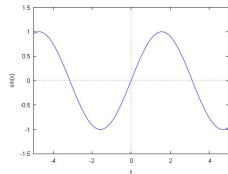
8. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif?



(a)



(b)



(c)

Operasi Aljabar pada Fungsi

Untuk fungsi f dan g dengan $D_f = D_g = D$ berlaku

- Penjumlahan:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in D$$

- Pengurangan:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D$$

- Perkalian:

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D$$

- Pembagian:

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D \text{ dan } g(x) \neq 0.$$

Fungsi komposisi

Dua atau lebih fungsi dapat dioperasikan secara berurutan sehingga menghasilkan fungsi yang baru. Fungsi ini dinamakan fungsi komposisi. Artinya hasil dari fungsi pertama dilanjutkan ke fungsi ke dua, dan seterusnya.

Fungsi komposisi (2)

Misalkan

$$f : D_f \rightarrow R_f$$
$$x \mapsto x^2$$

dan

$$g : D_g \rightarrow R_g$$
$$x \mapsto x + 1,$$

maka $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
dan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$.

Fungsi invers

Misalkan f adalah suatu fungsi injektif

$$f : D_f \rightarrow R_f,$$

maka fungsi invers (balikan) nya adalah

$$f^{-1} : R_f \rightarrow D_f.$$

Jika aturan fungsi f adalah $y = f(x)$, maka

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Arti fungsi invers adalah $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in D_f.$

Fungsi genap

Jika $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$, maka f disebut fungsi genap. Fungsi ini simetri terhadap sumbu y . Contohnya, $y = f(x) = x^2$.

Fungsi ganjil

Jika $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$, maka f disebut fungsi ganjil. Fungsi ini simetri terhadap titik asal $O(0, 0)$. Contohnya, $y = f(x) = x^3$.

Fungsi bilangan bulat terbesar

Di antara dua bilangan bulat, ada bilangan real $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$n \leq x < n + 1, \text{ untuk } n \in \mathbb{N}.$$

Fungsi $[x]$ adalah bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x . Dalam hal ini,

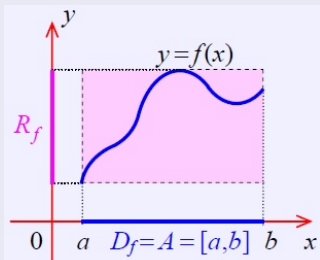
$$[x] = n \text{ jika } x \in [n, n + 1).$$

Contohnya, $[1.8] = 1$, $[2] = 2$, $[-1.2] = -2$.

Grafik Fungsi

Himpunan semua pasangan $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dengan $y = f(x)$, $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ dan $y \in B \subseteq \mathbb{R}$, dinamakan **grafik fungsi** (kurva)

$$f : A \rightarrow B, f(x) = y.$$



Contoh Soal

9. Misalkan $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = 2x$. Tentukan:
- $(f \circ g)(x)$
 - $g(f(x))$
 - $f(g(1))$

Contoh Soal

10. Misalkan $f(x) = x^2$.

- Apakah fungsi f adalah injektif!
- Jika f merupakan fungsi injektif, maka tentukan inversnya!

Contoh Soal

11. Misalkan $f(x) = x^3$.

- Apakah fungsi f adalah injektif!
- Jika f merupakan fungsi injektif, maka tentukan inversnya!

12. Sketsalah grafik fungsi dari

- a) fungsi injektif
- b) fungsi surjektif
- c) fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Jawab:

$$f(x=0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Jawab:

$$f(x=0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Lalu, apa yang terjadi ketika $x = 3$?

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Jawab:

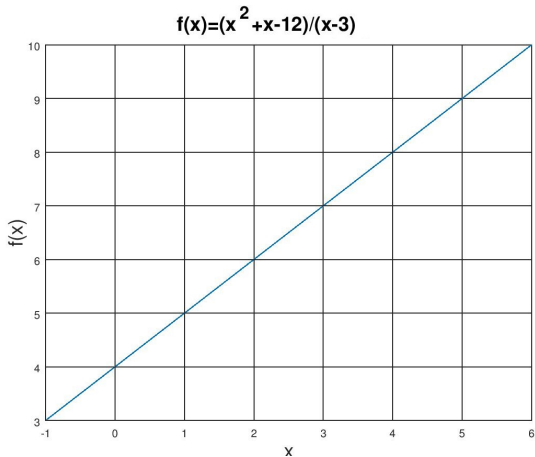
$$f(x = 0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

Lalu, apa yang terjadi ketika $x = 3$?

$$\begin{aligned} f(x = 3) &= \frac{3^2 + 3 - 12}{3 - 3} \\ &= \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

x	$f(x)$
2,8	6,8
2,9	6,9
2,95	6,95
2,999	6,999
3	?
3,001	7,001
3,05	7,05
3,1	7,1
3,2	7,2

Namun berdasarkan tabel, dapat disimpulkan bahwa ketika x mendekati 3, maka $f(x)$ mendekati 7.



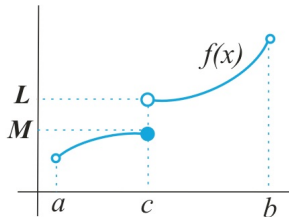
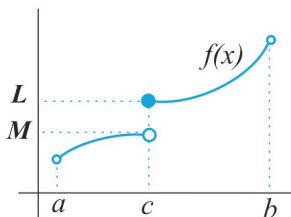
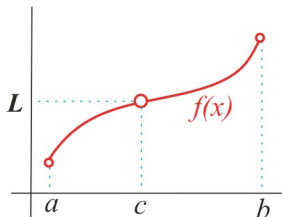
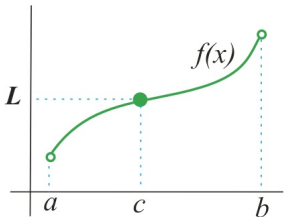
Misal diberikan interval selang buka $I = (a, b)$ pada \mathbb{R} dan titik $c \in I$. Suatu fungsi f terdefinisi di I , namun titik c mungkin tidak terdefinisi (mungkin juga terdefinisi).

Misal diberikan interval selang buka $I = (a, b)$ pada \mathbb{R} dan titik $c \in I$. Suatu fungsi f terdefinisi di I , namun titik c mungkin tidak terdefinisi (mungkin juga terdefinisi).

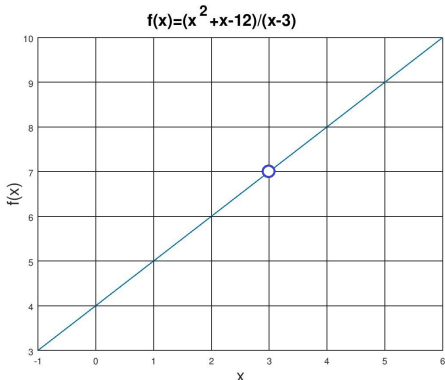
Perhatikan bahwa

$$0 < |x - c| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - c < \delta$$

merupakan himpunan semua bilangan Real x yang jaraknya ke titik c kurang dari δ . Dengan sifat kerapatannya, bisa diambil sampel bilangan-bilangan yang mendekati titik c tersebut. Istilah x mendekati c mengandung makna bahwa jarak antara titik x ke titik c semakin lama semakin kecil.



Misalkan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$,
memiliki domain $D_f = \mathbb{R} - \{3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ seperti pada gambar berikut.



Intuisinya (berdasarkan pengalaman dari tabel), jika nilai sebelum $f(x = 3)$ dan setelah $f(x = 3)$ mendekati nilai sama, maka nilai $f(x = 3)$ dapat "ditebak".

Pertanyaannya,

❶ berapa nilai δ_1 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 7| < 1?$$

Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?

Pertanyaannya,

- 1 berapa nilai δ_1 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 7| < 1?$$

Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?

- 2 berapa nilai δ_2 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 7| < \frac{1}{1000000}?$$

Pertanyaannya,

- 1 berapa nilai δ_1 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 7| < 1?$$

Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?

- 2 berapa nilai δ_2 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 7| < \frac{1}{1000000}?$$

- 3 misalkan ε bilangan positif sebarang, tentukan δ agar

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon?$$

Terlihat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, selalu dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon.$$

Dikatakan

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7.$$

Misalkan nilai limit dari $f(x)$ untuk x mendekati titik c adalah L , maka dino-
tasikan

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

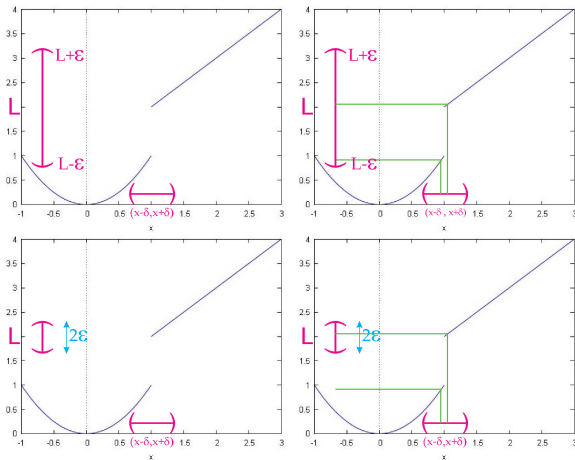
Artinya $\forall \varepsilon > 0$ dapat dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

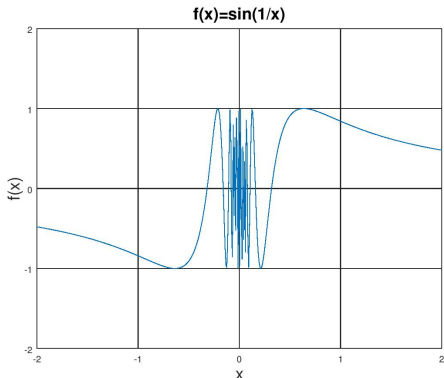
Arti "mendekati" ini, bisa dari kiri titik c atau dari kanan titik c . Dengan kata lain, nilai limit $f(x)$ untuk x mendekati c ada, jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Perhatikan bahwa fungsi berikut tidak memiliki limit di $x = 0$. Kenapa?



Sifat-sifat Limit

Misalkan f dan g adalah dua buah fungsi, dan $k \in \mathbb{R}$, maka

1. $\lim_{x \rightarrow c} k = k$
2. $\lim_{x \rightarrow c} x = c$
3. $\lim_{x \rightarrow c} (kf)(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
5. $\lim_{x \rightarrow c} (f - g)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) - \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
6. $\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
7. $\lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$

Sifat-sifat Limit

- $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) \geq 0$ untuk n genap
- Jika $p(x)$ fungsi polinom, maka $\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$
- Teorema Apit (Teorema Sandwich).
Misalkan f, g, h adalah tiga fungsi dengan

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I.$$

Jika $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$,
maka $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$. Ilustrasikan secara grafik!

Sifat-sifat Limit

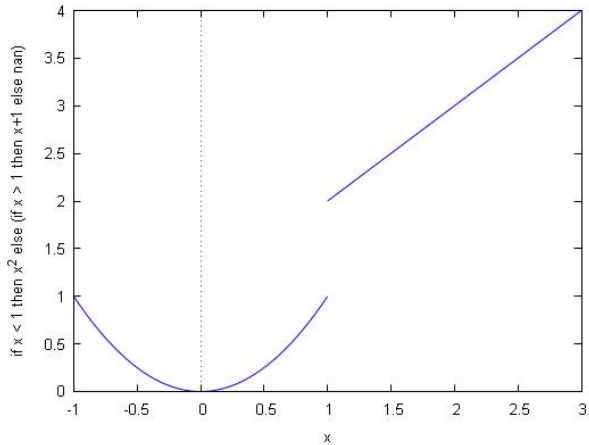
Sifat-sifat Limit Fungsi Trigonometri

- $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$ dan $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$.

Limit Satu Arah (limit satu sisi)

Perhatikan *piecewise function* atau *step function* berikut.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$



Tentukan:

- δ_1 agar $0 < |x - 1| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2!$
- δ_2 agar $0 < |x - 1| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}!$
- δ_3 agar $0 < |x - 1| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}!$

Tentukan:

- δ_1 agar $x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2!$
- δ_2 agar $x - 1 < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}!$
- δ_3 agar $x - 1 < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}!$

Tentukan:

- δ_1 agar $x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2!$
- δ_2 agar $x - 1 < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}!$
- δ_3 agar $x - 1 < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}!$
- jika $\varepsilon > 0$, adakah δ agar $x - 1 < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon!$

Tentukan:

- δ_1 agar $1 - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2!$
- δ_2 agar $1 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}!$
- δ_3 agar $1 - x < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}!$

Tentukan:

- δ_1 agar $1 - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2!$
- δ_2 agar $1 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}!$
- δ_3 agar $1 - x < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}!$
- jika $\varepsilon > 0$, adakah δ agar $1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon!$

Definisi limit kanan

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kanan** adalah L , dinotasikan

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L,$$

artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga

$$x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definisi limit kiri

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari **kiri** adalah L , dinotasikan

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L,$$

artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga

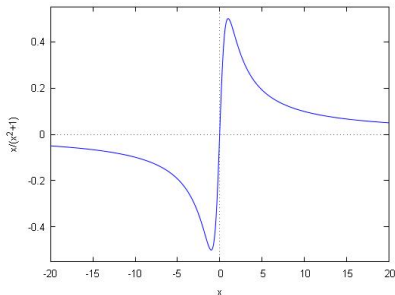
$$c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sifat-sifat

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = |L|$
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0.$

Limit Menuju Takhingga

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ berikut. Jika x terus meningkat tanpa batas, ditulis $x \rightarrow \infty$, maka nilai $f(x)$ cenderung menuju 0. Fenomena ini mendasari konsep limit di takhingga.



$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$ mendekati L jika x membesar tanpa batas.

\Leftrightarrow jarak $f(x)$ ke L dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan positif jika x cukup besar.

$\Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika $x > m$ untuk suatu $m > 0$.

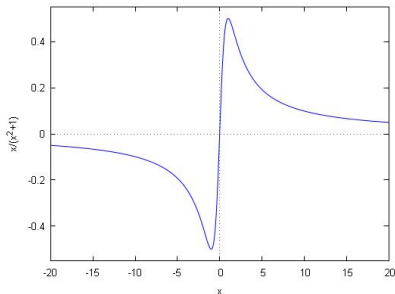
$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$ mendekati L jika x mengecil tanpa batas.

\Leftrightarrow jarak $f(x)$ ke L dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan positif jika x cukup kecil. (lebih kecil dari suatu bilangan negatif).

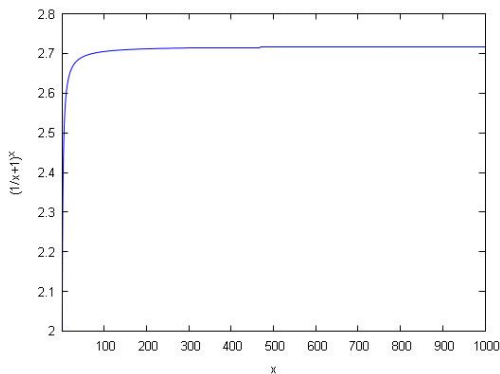
$\Leftrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika $x < n$ untuk suatu $n < 0$.

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n < 0 \ni x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

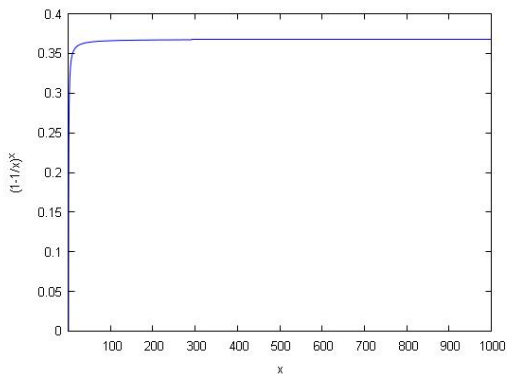


- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \Leftrightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow L$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow x \rightarrow -\infty \Rightarrow f(x) \rightarrow L$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n < 0 \ni x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Misalkan $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$.



Misalkan $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$, maka $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{e}$.



Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi

1. Bentuk $0/0$. Misal, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$.
2. Bentuk ∞/∞ . Misal, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$.

Solusi untuk [1] dan [2] adalah mengubah bentuk pecahannya sehingga rumus limit dapat digunakan.

3. Bentuk $0 \cdot \infty$. Misal, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$, dengan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ dan

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty.$$

Solusi: Ubahlah bentuknya menjadi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{1/g(x)} \text{ (bentuk } 0/0) \text{ atau } \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{1/f(x)} \text{ (bentuk } \infty/\infty)$$

4. Bentuk $\infty - \infty$. Misal, $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x))$, dengan $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$.

Solusi: Ubahlah bentuknya menjadi ∞/∞ .

Contoh Soal

1. Misalkan $k \in \mathbb{N}$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k}$!

Jawab:

Contoh Soal

1. Misalkan $k \in \mathbb{N}$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k}$!

Jawab: 0

Contoh Soal

2. Misalkan $k \in \mathbb{Q}$ dan $k > 0$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k}!$

Jawab:

Contoh Soal

2. Misalkan $k \in \mathbb{Q}$ dan $k > 0$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k}!$

Jawab: 0

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$!

Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$!

Jawab:

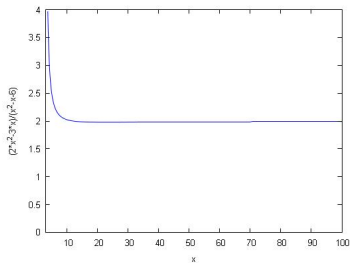
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}}{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{2 - 0}{1 - 0 - 6 \cdot 0} = 2.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$!

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x}{x^2 - x - 6} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}\right)} = \frac{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}}{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{x^2}} \\ &= \frac{2 - 0}{1 - 0 - 6 \cdot 0} = 2.\end{aligned}$$



Contoh Soal

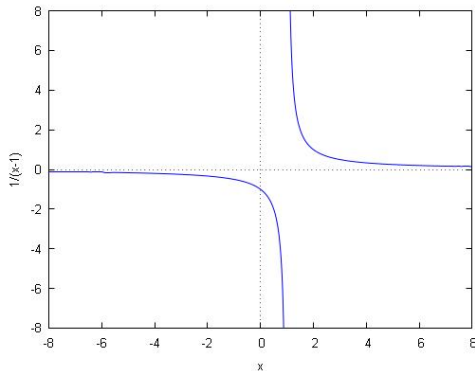
4. Sketsalah gambar $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Apakah limit $x \rightarrow 1$ ada?

Jawab:

Contoh Soal

4. Sketsalah gambar $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Apakah limit $x \rightarrow 1$ ada?

Jawab:



Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$!

Jawab:

Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$!

Jawab:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Contoh Soal

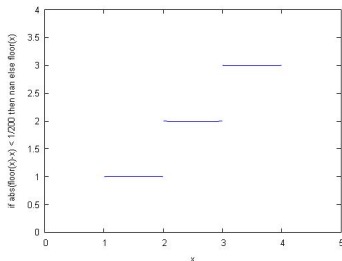
6. Misal diberikan fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = [x]$ yaitu bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x . Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$!

Jawab:

Contoh Soal

6. Misal diberikan fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = [x]$ yaitu bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x . Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$!

Jawab:



Contoh Soal

7. Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x+1, & x \in (1, 2] \\ \log(x-2), & x > 2. \end{cases}$$

Tentukan:

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)!$
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)!$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)!$

Contoh Soal

8. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4}$!

Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 4}$!

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2 - 3}{2 + 2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

Jawab:

Misal $t = \sqrt{x^2 + 5}$, maka $x \rightarrow 2 \Leftrightarrow t \rightarrow 3$ dan
 $t^2 = x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 5$.

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

Jawab:

Misal $t = \sqrt{x^2 + 5}$, maka $x \rightarrow 2 \Leftrightarrow t \rightarrow 3$ dan
 $t^2 = x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 5$. Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{4-(t^2-5)}{3-t} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{9-t^2}{3-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(3+t)(3-t)}{3-t} = \lim_{t \rightarrow 3} (3+t) = 6.\end{aligned}$$

Contoh Soal

10. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1}$!

Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1}$!

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}{x \left(2 + \frac{1}{x}\right)} = \dots$$

Contoh Soal

11. Tentukan $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1}$!

Jawab:

Contoh Soal

11. Tentukan $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1}$!

Jawab:
 $-\frac{1}{2}$

Contoh Soal

12. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$!

Jawab:

Contoh Soal

12. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$!

Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Contoh Soal

13. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$!

Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 3x} + x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1 \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} = \frac{3}{1 + 1} = 1\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

14. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x} + x)!$

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}!$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}!$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{-\frac{1}{x}}!$

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}!$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}!$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{-\frac{1}{x}}!$

Jawab: e

Contoh Soal

16. Tentukan konstanta a dan b sedemikian sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - \sqrt{x} + b}{x - 4} = \frac{3}{4}!$$

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan konstanta a dan b sedemikian sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - \sqrt{x} + b}{x - 4} = \frac{3}{4}!$$

Jawab:

Misalkan

$$\frac{ax - \sqrt{x} + b}{x - 4} = \frac{(2 - \sqrt{x})(c - d\sqrt{x})}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)},$$

maka $ax - \sqrt{x} + b = (2 - \sqrt{x})(c - d\sqrt{x})$. Akibatnya $a = d$, $b = 2c$,
dan $d = \frac{1-c}{2}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax - \sqrt{x} + b}{x - 4} &= \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(c - d\sqrt{x})}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} &= \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 4} -\frac{c - d\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{2d - c}{4} &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Sehingga $d = \frac{3+c}{2}$. Namun karena $d = \frac{1-c}{2}$, maka $c = -1$. Oleh karena itu, diperoleh $a = 1$ dan $b = -2$.

Alert

Ingat!

Minggu depan KUIS!



Kekontinuan

Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada selang buka I yang memuat titik c . Maka fungsi f kontinu di c , jika

- grafik kurangnya tak terputus di titik c
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

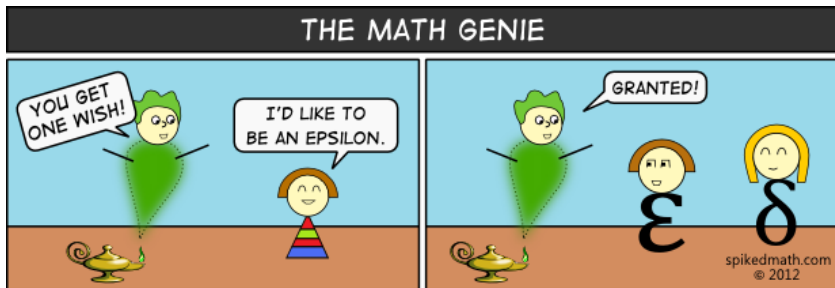
Definisi limit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

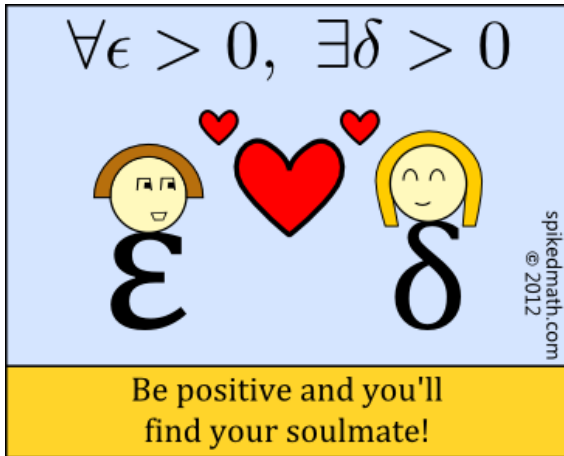
Definisi kontinu

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kenapa harus ada ε dan δ ?



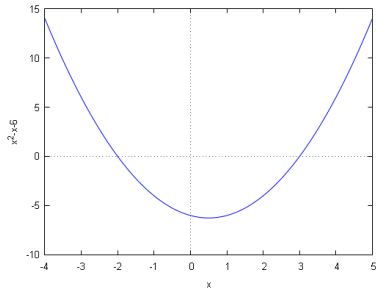
*CREDIT GOES TO KEN S. FOR THIS MATH GENIE IDEA



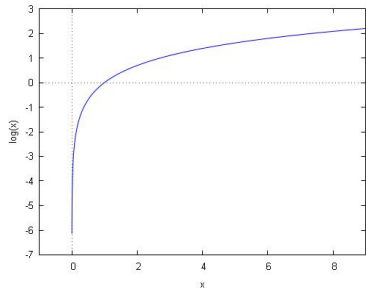
Fungsi f kontinu pada interval I jika grafiknya tidak terputus pada interval tersebut.

Fungsi f kontinu pada interval I jika grafiknya tidak terputus pada interval tersebut.

Fungsi f kontinu pada interval I , jika dapat digambar grafik fungsinya pada interval I tanpa harus mengangkat spidol dari papan tulis.



(a) $f(x) = x^2 - x - 6$ kontinu pada \mathbb{R}



(b) $f(x) = \log(x)$ kontinu pada $(0, \infty)$

Kontinu Kiri dan Kontinu Kanan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(a, c]$, maka f **kontinu kiri** di c jika

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c).$$

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $[c, b)$, maka f **kontinu kanan** di c jika

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c).$$

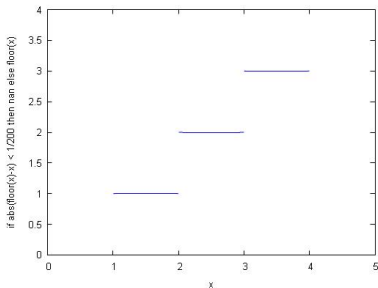
Fungsi f kontinu di titik c jika fungsi f kontinu kiri dan kontinu kanan di c .

Fungsi f dikatakan kontinu pada interval selang buka I jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik pada I .

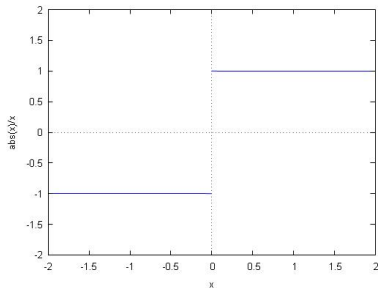
Fungsi f dikatakan kontinu pada interval selang buka I jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik pada I .

Fungsi f kontinu pada interval tutup $I = [a, b]$ jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik $c \in (a, b)$, kontinu kanan di a , dan kontinu kiri di b .

Misalkan $f(x) = [x]$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$, dan $g(0) = 1$.



(a) $f(x)$ kontinu kanan $\forall x \in \mathbb{N}$



(b) $g(x)$ kontinu kanan di $x = 0$

Sifat-sifat Kontinu

Jika fungsi f dan fungsi g kontinu di $c \in I$, maka

- fungsi $f + g$ kontinu di titik c pada selang I
- fungsi $f - g$ kontinu di titik c pada selang I
- fungsi fg kontinu di titik c pada selang I
- fungsi $\frac{f}{g}$ kontinu di titik c pada selang I (dengan $g(c) \neq 0$)
- fungsi $|f|$ kontinu di titik c pada selang I

Fungsi-fungsi berikut kontinu pada domainnya:

- suku banyak
- fungsi rasional
- fungsi irasional
- trigonometri: \sin , \cos

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

maka $g \circ f$ kontinu di c , atau

$$\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (g(f(x))) = g(f(c)) = g \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right).$$

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

maka $g \circ f$ kontinu di c , atau

$$\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(c) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c} (g(f(x))) = g(f(c)) = g\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right).$$

Jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ dan fungsi g kontinu di L , maka

$$\lim_{x \rightarrow c} (g(f(x))) = g(L) = g\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right).$$

Contoh Soal

1. Tentukan konstanta k agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x - k)^2, & x \leq 1 \\ kx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} !

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan konstanta k agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x - k)^2, & x \leq 1 \\ kx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} !

Jawab:

Perhatikan bahwa

- fungsi $y = (x - k)^2$ kontinu pada $(-\infty, 1)$, dan
- fungsi $y = kx - 1$ kontinu pada $(1, \infty)$.

Agar fungsi f kontinu pada \mathbb{R} , maka fungsi f harus kontinu di $x = 1$. Dalam hal ini,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}(1 - k)^2 &= k - 1 = (1 - k)^2 \\ k^2 - 2k + 1 &= k - 1 \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ (k - 1)(k - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $k = 1$ atau $k = 2$.

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dan

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$

Maka syarat agar $f(x)$ kontinu pada \mathbb{R} adalah mendefinisikan nilai $f(x = 1) = 2$.

Contoh Soal

3. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ ax + b, & 1 \leq x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

4. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x+1, & x \in (1, 2] \\ \log(x-2), & x > 2. \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} !

Jawab:

Contoh Soal

5. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} !

Jawab:

Contoh Soal

6. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 2 \\ x^2 + 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu pada \mathbb{R} !

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - x - 6}$ tidak kontinu!

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - x - 6}$ tidak kontinu!

Jawab:

Clue: tentukan di titik mana fungsi tersebut tidak terdefinisi.

Contoh Soal

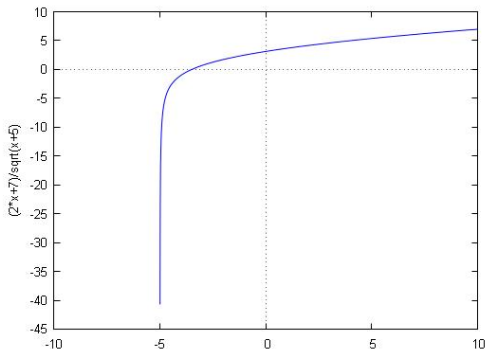
8. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \frac{2x + 7}{\sqrt{x + 5}}$ kontinu!

Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \frac{2x + 7}{\sqrt{x + 5}}$ kontinu!

Jawab:

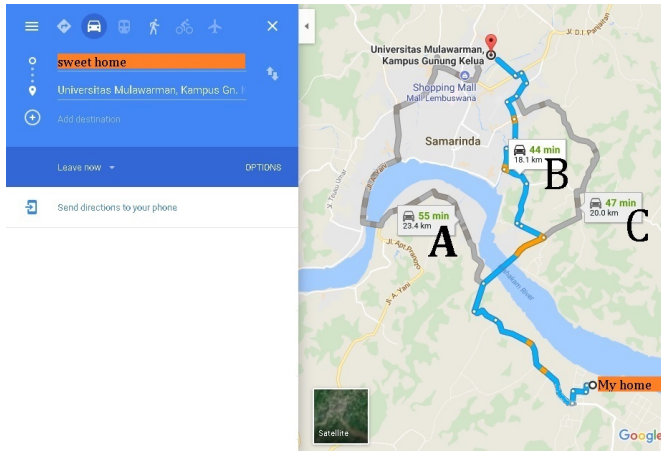


Prolog Turunan

Dua masalah dengan satu tema

1. kelajuan sesaat?
2. masalah garis singgung?

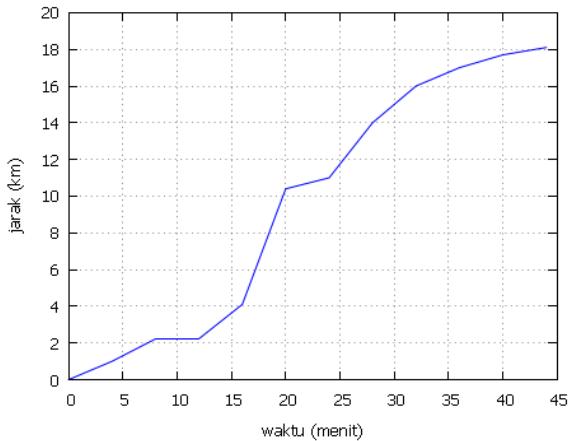
Kelajuan sesaat



- 1 Jalur A:
waktu = 55 menit, jarak = 23,4 km
- 2 Jalur B:
waktu = 44 menit, jarak = 18,1 km
- 3 Jalur C:
waktu = 47 menit, jarak = 20,0 km

Berapa kelajuan rata-ratanya?

Perjalanan Ke Kampus Tercinta



1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:

a. $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:

- $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit
- $t = 8$ sampai $t = 12$, maka $v = \frac{2,1-2,1}{12-8} = 0$ km per menit

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:

- $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit
- $t = 8$ sampai $t = 12$, maka $v = \frac{2,1-2,1}{12-8} = 0$ km per menit
- $t = 15$ sampai $t = 20$, maka $v = \frac{10,2-3,8}{25-20} = 1,28$ km per menit.

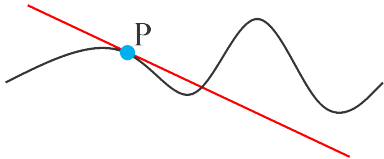
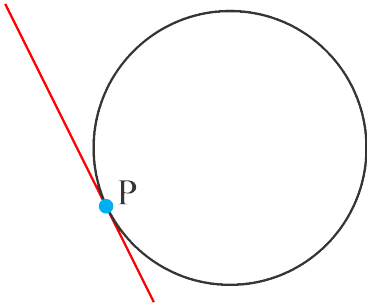
Masalahnya?

Kelajuan sesaat pada interval waktu tertentu, terlihat masih 'kasar' dalam perhitungannya.

Garis singgung

Euclides: "garis singgung adalah garis yang menyentuh suatu kurva hanya pada satu titik".

Kurva berikut tidak punya garis singgung?



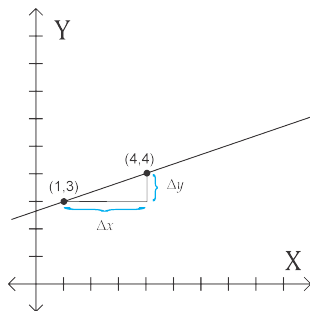
Masalahnya?

Definisi Euclid tentang garis singgung masih belum 'pas'.

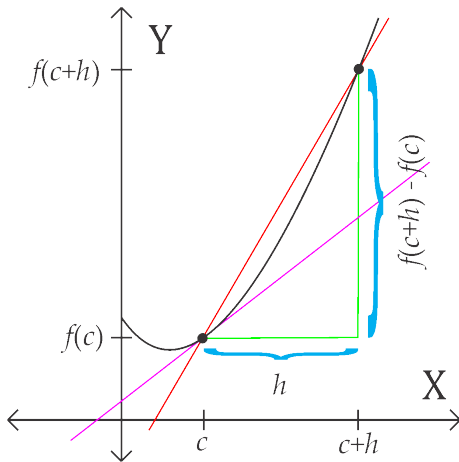
Ingat kembali rumus **gradien***) pada suatu garis berikut:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Maka gradien dapat menyatakan laju perubahan y terhadap x .



*) mengacu konsep pada kelajuan sesaat.



Berapa gradien **garis singgung** di titik $x = c$?

Definisi Turunan

Definisi

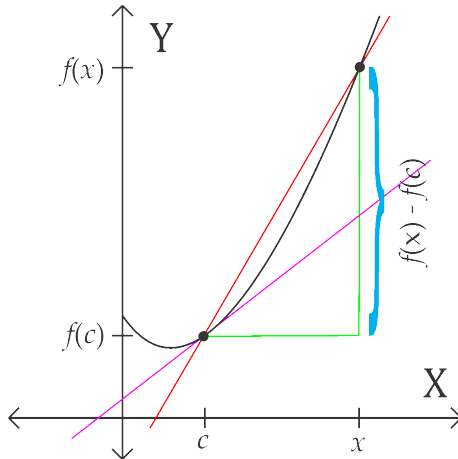
Misalkan f adalah fungsi, maka turunan dari fungsi f di titik c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \quad (3)$$

Misalkan $x = c + h$ disubstitusikan pada Persamaan (3), maka

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Jika limit ini ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan di $x = c$.



Teorema

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c .

Bukti:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ dapat ditulis menjadi

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c). \end{aligned}$$

Kebalikan Teorema tersebut belum tentu berlaku.

Misalkan $f(x) = |x|$ maka ketika $x = 0$,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

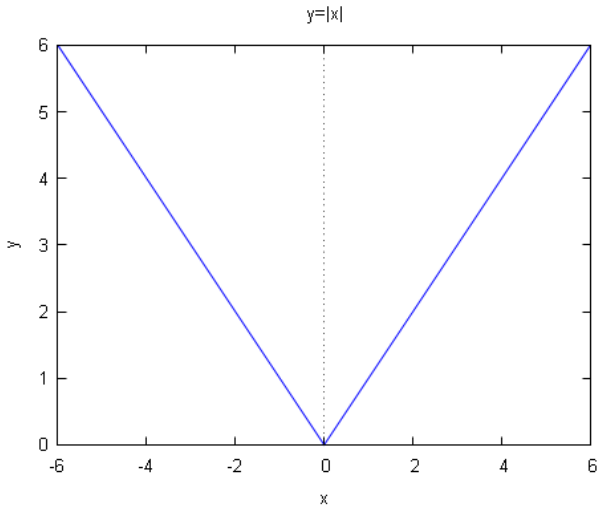
Sehingga

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1,$$

namun

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Oleh karena itu, $f'(x=0)$ tidak ada.



Contoh Soal

1. Misalkan $f(x) = 13x - 6$, tentukan $f'(4)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 13 = 13.\end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Misalkan $f(x) = x^3 + 7x$, tentukan $f'(x)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\&= 3x^2 + 7.\end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Misalkan $f(x) = 2/(x + 3)$, tentukan $f'(c)$!

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{c+3}}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}. \end{aligned}$$

Contoh Soal

4. Misalkan $f(x) = 3x^2 + 4$, tentukan $f'(x)$!

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 4}$, tentukan $f'(x)$!

Jawab:

Contoh Soal

6. Misalkan $f(x) = \sqrt{2x}$, tentukan $f'(x)$!

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan garis singgung parabola $y = x^2 - 8x + 9$ di titik $(3, -6)$!

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan garis singgung parabola $y = x^2 - 8x + 9$ di titik $(3, -6)$!

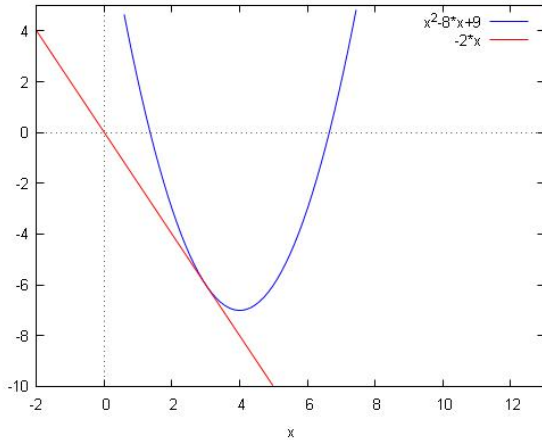
Jawab:

$$f'(c = 3) = \dots$$

$$y - f(c) = f'(c)(x - 3)$$

$$y + 6 = f'(c)(x - 3)$$

$$y = \dots$$



Contoh Soal

8. Tentukan garis singgung parabola $y = 4x - 3x^2$ di titik $(2, -4)$!

Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan garis singgung fungsi $y = x^3 - 3x + 1$ di titik $(2, 3)$!

Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan garis singgung fungsi $y = \frac{2x + 1}{x + 2}$ di titik $(1, 1)$!

Jawab:

Aturan Dasar

Berikut adalah beberapa aturan dasar:

1. $\frac{dk}{dx} = 0$, dengan k adalah konstanta
2. $\frac{d(kx^n)}{dx} = nkx^{n-1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ (**ingat:** hanya bil. Asli)
3. $\frac{d(g(x) \pm h(x))}{dx} = g'(x) \pm h'(x)$
4. $\frac{d(g(x) \cdot h(x))}{dx} = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$
5. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$ (*The Quotient Rule*).

Turunan Fungsi Trigonometri

$$6. f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$7. f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$8. f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$$

$$9. f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$$

$$10. f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$$

$$11. f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$$

Turunan Fungsi Trigonometri (2)

$$12. f(x) = \sinh x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$$

$$13. f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$$

$$14. f(x) = \tanh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$15. f(x) = \operatorname{sech} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$16. f(x) = \operatorname{coth} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$17. f(x) = \operatorname{csch} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch} x \operatorname{coth} x$$

Aturan Tambahan

$$18. \frac{d(|x|)}{dx} = \frac{|x|}{x}$$

$$19. \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$20. \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$21. \frac{d(a^{\log x})}{dx} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$22. \frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$$

$$23. \frac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$24. \frac{d(\cos^{-1} x)}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$25. \frac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$26. \frac{d(\sec^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Contoh Soal

11. Misalkan $y = 2 \sin x + 3 \cos x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(2 \sin x + 3 \cos x)}{dx} \\ &= \frac{d(2 \sin x)}{dx} + \frac{d(3 \cos x)}{dx} \\ &= 2 \frac{d(\sin x)}{dx} + 3 \frac{d(\cos x)}{dx} \\ &= 2 \cos x - 3 \sin x.\end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Misalkan $y = 4 \csc x + 4 \sin x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
Jawab:

Contoh Soal

13. Misalkan $y = \frac{1}{f(x)}$ dengan $f(x) \neq 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

14. Misalkan $f(x) = \begin{cases} m/x, & 0 < x < 1 \\ x^2 + nx, & x \geq 1, \end{cases}$.

Tentukan m dan n sedemikian sehingga $f'(1)$ ada!

Jawab:

Contoh Soal

15. Misalkan $y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$ dengan $\cos x \neq 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

16. Misalkan $y = \frac{x \cos x + \sin x}{x^2 + 1}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka fungsi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan di x dan berlaku:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

atau $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$.

Contoh Soal

17. Misalkan $y = \sin 3x$, tentukan dy/dx !

Jawab:

Contoh Soal

18. Misalkan $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{100}$, tentukan $f'(x)$!

Jawab:

Contoh Soal

19. Misalkan $z = \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3} \right)^{13}$, tentukan $z' = \frac{dz}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

19. Misalkan $z = \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3}\right)^{13}$, tentukan $z' = \frac{dz}{dx}$!

Jawab:

$$z' = 13 \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{x^4 + 3}\right)^{12} \cdot \frac{-x^6 + 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 6}{(x^4 + 3)^2}.$$

Contoh Soal

20. Tentukan $\frac{d(\sin^3(4x))}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

20. Tentukan $\frac{d(\sin^3(4x))}{dx}$!

Jawab:

$$12 \cos(4x) \sin^2(4x).$$

Contoh Soal

21. Misalkan $y = \left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

22. Misalkan $y = 2 \sin a$ dan $x = 2 \sin 2a$, tentukan dy/dx !

Jawab:

Contoh Soal

22. Misalkan $y = 2 \sin a$ dan $x = 2 \sin 2a$, tentukan dy/dx !

Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{da} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}} \\ &= \dots\end{aligned}$$

Contoh Soal

23. Misalkan $y = 2a^2 + a$ dan $x = 3a + 1$, tentukan dy/dx !

Jawab:

Contoh Soal

23. Misalkan $y = 2a^2 + a$ dan $x = 3a + 1$, tentukan dy/dx !

Jawab:

Karena

$$\frac{dy}{da} = 4a + 1 \text{ dan } \frac{dx}{da} = 3,$$

maka $\frac{dy}{dx} = \frac{4a + 1}{3}$.

Turunan Fungsi Implisit

Misalkan $g(y) = f(x)$, maka

$$\begin{aligned}\frac{d(g(y))}{dx} &= \frac{d(f(x))}{dx} \\ d\frac{g(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ g'(y) \frac{dy}{dx} &= f'(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{f'(x)}{g'(y)}\end{aligned}$$

Turunan Fungsi Eksponensial

Misalkan r adalah bilangan rasional tak nol. Maka untuk $x > 0$,

$$d(x^r)/dx = rx^{r-1}.$$

Bukti:

Karena r adalah bilangan rasional, maka dapat ditulis sebagai p/q , dimana p dan q adalah dua bilangan bulat dengan $q > 0$. Misalkan $y = x^r = x^{p/q}$, maka $y^q = x^p$. Dengan menggunakan diferensial implisit,

$$\begin{aligned}\frac{d(y^q)}{dx} &= \frac{d(x^p)}{dx} \\ qy^{q-1} \frac{dy}{dx} &= px^{p-1} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{px^{p-1}}{q(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q} x^{p/q-1} = rx^{r-1}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$, tentukan dy/dx !

Jawab:

Contoh Soal

1. Jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$, tentukan dy/dx !

Jawab:

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$
$$y = \dots$$

Sehingga $dy/dx = \dots$

Contoh Soal

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $x^{4/3} = 4096 - y^{4/3}$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $x^{4/3} = 4096 - y^{4/3}$!

Jawab:

$$\frac{d(x^{4/3})}{dx} = \frac{d(4096 - y^{4/3})}{dx}$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $6y^3 + \cos y = x^3!$
Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $x^3 + y^3 = 6xy$!
Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ jika $x^3 + y^3 = 6xy$!

Jawab:

$$\begin{aligned}d\frac{x^3 + y^3}{dx} &= d\frac{6xy}{dx} \\ 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} &= 6x\frac{dy}{dx} + 6y \\ x^2 + y^2y' &= 2xy' + 2y \\ y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}\end{aligned}$$

Contoh Soal

5. Tentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ jika $\sin(x + y) = y^2 \cos x!$
Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ jika $\sin(x + y) = y^2 \cos x$!

Jawab:

$$\begin{aligned}d \frac{\sin(x + y)}{dx} &= d \frac{y^2 \cos x}{dx} \\ \cos(x + y)(1 + y') &= y^2(-\sin x) + (\cos x)(2yy') \\ y' &= \dots\end{aligned}$$

Contoh Soal

6. Tentukan $y' = \frac{dy}{dx}$ jika $\tan \frac{x}{y} = x + y!$
Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan y' jika $y \sec x = x \tan y!$
Jawab:

Turunan Tingkat Tinggi

Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi dan $f'(x)$ merupakan turunan pertamanya. Turunan kedua dari f adalah

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Dengan cara yang sama, turunan ketiga dari f adalah

$$f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}.$$

Secara umum, turunan ke n dari $y = f(x)$ dinotasikan sebagai

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Contoh Soal

1. Tentukan f' dan f'' dari $f(x) = x^3 - x!$

Jawab:

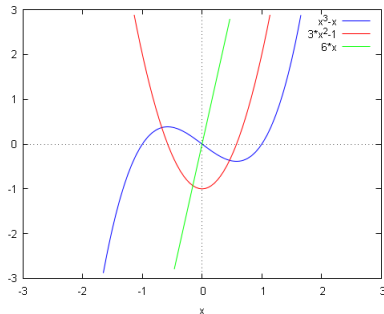
$$f'(x) = \dots, f''(x) = \dots$$

Contoh Soal

1. Tentukan f' dan f'' dari $f(x) = x^3 - x!$

Jawab:

$$f'(x) = \dots, f''(x) = \dots$$



Contoh Soal

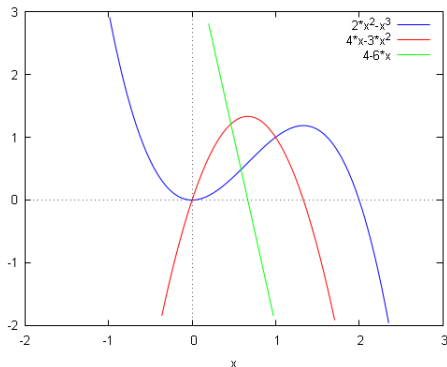
2. Tentukan f' , f'' dan $f'''(x)$ dari $f(x) = 2x^2 - x^3$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan f' , f'' dan $f'''(x)$ dari $f(x) = 2x^2 - x^3!$

Jawab:



Contoh Soal

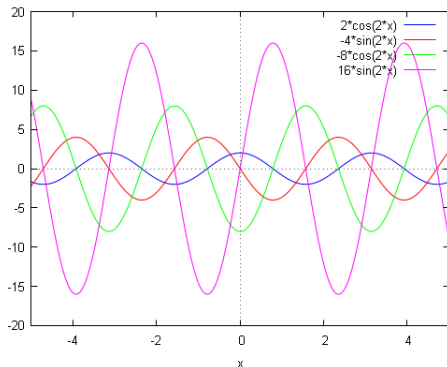
3. Tentukan f' , f'' , $f'''(x)$, dan $f^{(4)}(x)$ dari $f(x) = \sin 2x$!

Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan f' , f'' , $f'''(x)$, dan $f^{(4)}(x)$ dari $f(x) = \sin 2x$!

Jawab:



Contoh Soal

4. Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x) = x^n \tan x$ terhadap x , dimana $n \geq 1$.

Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan turunan pertama dan kedua dari fungsi $f(x) = x^n \tan x$ terhadap x , dimana $n \geq 1$.

Jawab:

$$f'(x) = x^n \sec^2 x + nx^{n-1} \tan x$$
$$f''(x) = \dots$$

Contoh Soal

5. Tentukan $f''(2)$ dari $f(\theta) = (\cos \theta\pi)^{-2}$!
Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan rumus turunan ke n dari $a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0!$
Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan $g'''(1)$ jika $g(r) = \cos^3 5r!$
Jawab:

Contoh Soal

8. Misalkan $g(t) = at^2 + bt + c$ dan diketahui $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$, dan $g''(1) = -4$. Tentukan a , b , dan c !

Jawab:

Maksimum dan Minimum

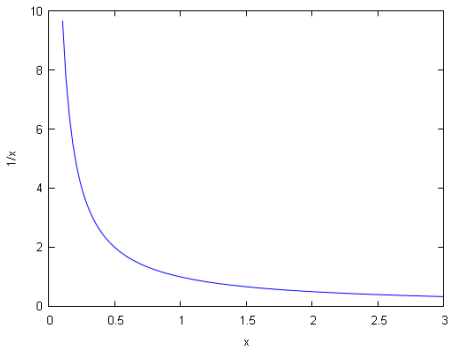
Definisi

Misalkan S domain f yang memuat titik c . Maka

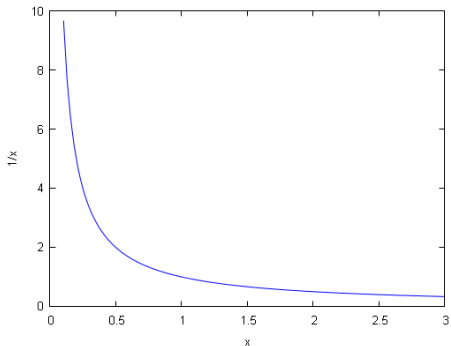
1. $f(c)$ adalah **nilai maksimum** f pada S jika $f(c) \geq f(x) \forall x \in S$.
2. $f(c)$ adalah **nilai minimum** f pada S jika $f(c) \leq f(x) \forall x \in S$.
3. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim** f pada S jika merupakan nilai maksimum atau nilai minimum.
4. Fungsi yang ingin dimaksimumkan atau diminimumkan adalah **fungsi objektif**.

Apakah f selalu memiliki nilai maksimum atau minimum pada domain S ?

Apakah f selalu memiliki nilai maksimum atau minimum pada domain S ?
Misalkan $f(x) = 1/x$ pada $S = (0, \infty)$.



Apakah f selalu memiliki nilai maksimum atau minimum pada domain S ?
Misalkan $f(x) = 1/x$ pada $S = (0, \infty)$.



Apakah f memiliki nilai maksimum atau minimum pada $S = [1, 3]$?

Teorema min-maks

Jika f kontinu pada selang tutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan minimum di sana.

Teorema min-maks

Jika f kontinu pada selang tutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan minimum di sana.

Silahkan gambar semua kemungkinan yang terjadi!

Misalkan interval $I = [a, b]$. Titik a dan b disebut **titik ujung**.

Jika c adalah suatu titik dimana $f'(c) = 0$, maka c disebut **titik stasioner**. Perhatikan bahwa garis singgung di titik c tersebut adalah horisontal. Nilai ekstrim sering terjadi di titik stasioner.

Jika c adalah titik interior dimana f' tidak ada di c , maka c disebut **titik singular**. Beberapa kemungkinan pada grafik f (ketika digambar) tersebut, yaitu memiliki sudut yang tajam (tidak mulus), garis singgung vertikal, adanya lompatan, atau terjadi oskilasi.

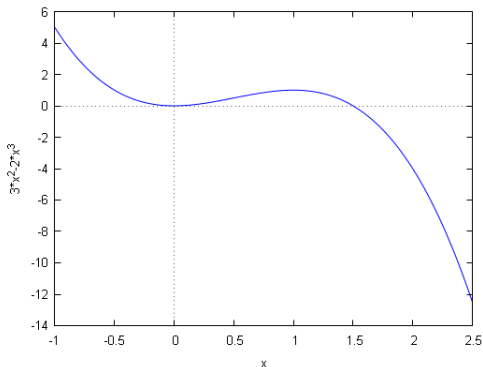
Sebarang titik yang memenuhi tiga tipe titik (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) dalam domain fungsi f , disebut **titik kritis** f .

Contoh Soal

1. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $[-\frac{1}{2}, 2]$!

Contoh Soal

1. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $[-\frac{1}{2}, 2]!$

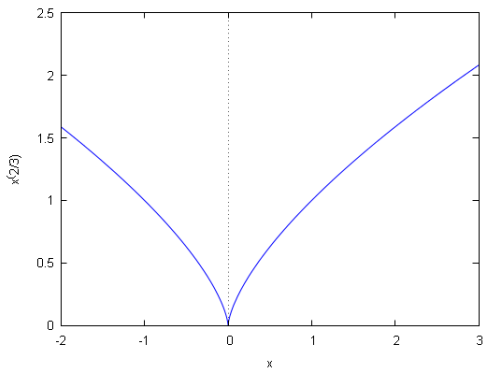


Contoh Soal

2. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = x^{2/3}$ pada $[-1, 2]$!

Contoh Soal

2. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = x^{2/3}$ pada $[-1, 2]$!

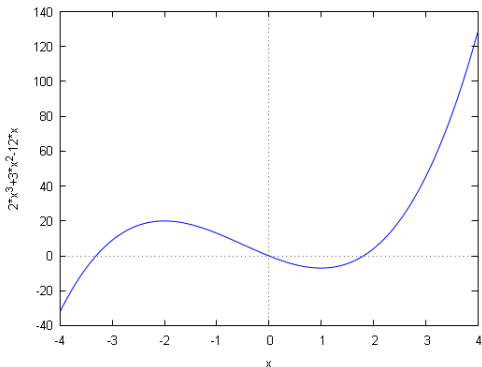


Contoh Soal

3. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x)$ pada $[-3, 3]$!

Contoh Soal

3. Tentukan titik kritis fungsi $f(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x)$ pada $[-3, 3]$!



Cotoh Soal

4. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 4.$$

Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi

$$f(x) = 1 + (x + 1)^2, \quad -2 \leq x \leq 5.$$

Jawab:

Contoh Soal

6. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 4}.$$

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi

$$f(x) = x\sqrt{x - x^2}.$$

Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi

$$f(x) = 2 \cos(x) + \sin(2x), \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$$

Jawab:

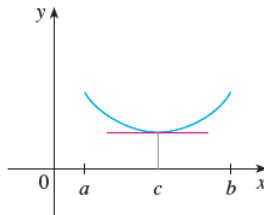
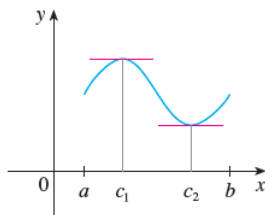
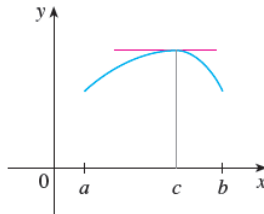
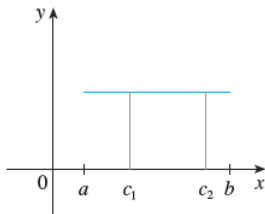
Teorema Rolle

Teorema Rolle

Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi kondisi berikut:

1. f kontinu pada interval selang tutup $[a, b]$,
2. f terdiferensialkan pada selang buka (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$,

maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.



Teorema Nilai Rata-rata

Teorema Nilai Rata-rata

Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi kondisi berikut:

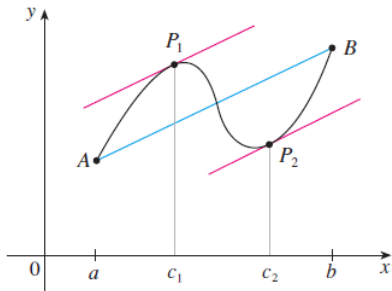
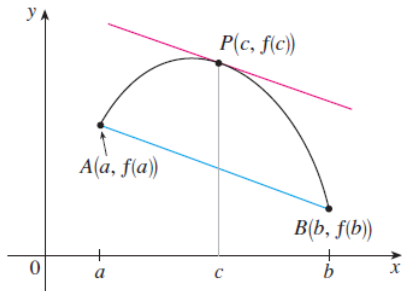
1. f kontinu pada interval tutup $[a, b]$,
2. f terdiferensialkan pada selang buka (a, b) ,

maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

yang ekuivalen dengan

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Teorema

Jika $f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$, maka f adalah fungsi konstan pada (a, b) .

Akibat

Jika $f'(x) = g'(x) \forall x \in (a, b)$, maka $f - g$ adalah fungsi konstan pada (a, b) .
Oleh karena itu, $f(x) = g(x) + c$ dengan c adalah suatu konstanta.

Contoh Soal

1. Misalkan $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ pada interval $[-1, 3]$. Perhatikan bahwa f kontinu pada $[-1, 3]$, terdiferensialkan pada $(-1, 3)$ dan

$$f(-1) = f(3) = \dots .$$

Oleh karena itu berdasarkan Teorema Rolle bahwa terdapat $c \in (-1, 3)$ sedemikian sehingga $f'(c) = \dots$. Maka

$$c = \dots$$

Contoh Soal

2. Misalkan $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 2$ pada $[-2, 2]$. Carilah semua c yang memenuhi Teorema Rolle!

Jawab:

Contoh Soal

3. Misalkan $f(x) = \sin(x/2)$ pada $[\pi/2, 3\pi/2]$. Carilah semua c yang memenuhi Teorema Rolle!

Jawab:

Contoh Soal

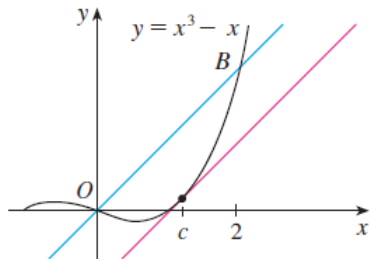
4. Misalkan $f(x) = x^3 - x$ pada interval $[0, 2]$. Perhatikan bahwa f kontinu pada $[0, 2]$ dan terdiferensialkan pada $(0, 2)$. Oleh karena itu berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata, bahwa terdapat $c \in (0, 2)$ sedemikian sehingga

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0).$$

Karena $f(2) = \dots$, $f(0) = \dots$, dan $f'(x) = \dots$, maka

$$c = \dots$$

karena $c \in (0, 2)$.



Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ pada $[0, 2]$. Carilah semua c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata!

Jawab:

Contoh Soal

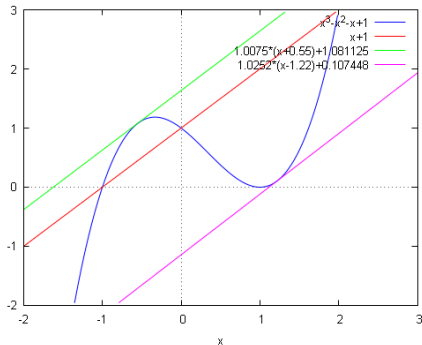
6. Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ pada $[1, 2]$. Carilah semua c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata!

Jawab:

Contoh Soal

6. Misalkan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ pada $[1, 2]$. Carilah semua c yang memenuhi Teorema Nilai Rata-rata!

Jawab:



Aturan L'Hospital

Aturan L'Hospital

Misalkan f dan g terdiferensialkan dan $g'(x) \neq 0$ pada interval buka I yang mengandung a . Jika

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

atau

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \text{ atau } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Dalam hal ini, diasumsikan bahwa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ada.

Aturan L'Hospital mudah dibuktikan ketika: $f(a) = g(a) = 0$, f' dan g' kontinu, dan $g'(a) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$!

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = \dots$, maka

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \dots$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}!$

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2) = \dots$, maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \dots$$

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}!$

Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} !$

Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} !$

Jawab:

1/3

Contoh Soal

5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$!

Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$!

Jawab:

0

Indeterminate Products

Misalkan

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty \text{ (atau } -\infty),$$

maka harus hati-hati dalam menentukan hasil dari $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)]$. Jika fungsi f yang menang (lebih kuat) maka hasilnya adalah 0, namun jika fungsi g yang menang maka hasilnya adalah ∞ (atau $-\infty$).

Perhatikan bahwa perkalian kedua fungsi tersebut dapat ditulis menjadi

$$fg = \frac{f}{1/g} \text{ atau } fg = \frac{g}{1/f}$$

dan perubahan ini menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$. Sehingga aturan L'Hospital dapat digunakan.

Contoh Soal

1. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x!$

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x!$

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \dots$, maka

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \dots$$

Contoh Soal

2. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x}$!

Jawab: ∞

Contoh Soal

3. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x!$

Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan nilai $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \dots$, maka

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \dots$$

Perhatikan bahwa turunan pertama xe^x adalah

$$f'(x) = xe^x + e^x = (x + 1)e^x.$$

Karena e^x definit positif, maka

- $f'(x) > 0$ ketika $x + 1 > 0$
- $f'(x) < 0$ ketika $x + 1 < 0$.

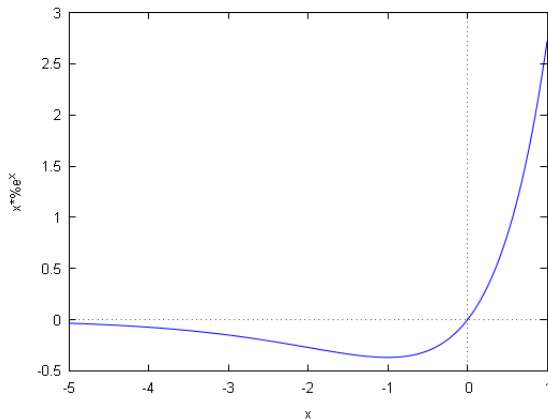
Jadi f naik pada $(-1, \infty)$ dan turun pada $(-\infty, -1)$.

Karena $f'(-1) = 0$ dan nilai f' berubah dari negatif ke positif di $x = -1$, maka $f(-1) = -e^{-1}$ adalah minimum lokal (dan mutlak). Turunan keduanya,

$$f''(x) = (x + 1)e^x + e^x = (x + 2)e^x.$$

Karena $f''(x) > 0$ jika $x > -2$ dan $f''(x) < 0$ jika $x < -2$, maka cekung ke bawah pada $(-2, \infty)$ dan cekung ke atas pada $(-\infty, -2)$. Sehingga titik beloknya adalah

$$(-2, -2e^{-2}).$$



Indeterminate Differences

Misalkan

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

maka juga harus hati-hati dalam menentukan hasil dari $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$. Ubah bentuk pengurangan tersebut menjadi pembagian. Gunakan penyebut bersama, atau rasionalisasi, atau pemfaktoran sedemikian sehingga menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$.

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)!$

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \dots$, maka gunakan penyebut bersama.

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x)$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sec x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \dots$, maka gunakan penyebut bersama.

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sec x - \tan x) = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \dots = 0$$

Indeterminate Powers

Perhatikan bentuk $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}$. Misalkan

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, tipenya 0^0
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, tipenya ∞^0
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, tipenya 1^∞ .

Tiap kasus tersebut dapat dikerjakan dengan menggunakan logaritma natural.
Misalkan

$$y = [f(x)]^{g(x)} \text{ maka } \ln y = g(x) \ln f(x),$$

atau ditulis sebagai fungsi eksponensial

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Perhatikan bahwa $g(x) \ln f(x)$ bertipe $0 \cdot \infty$. Catatan: tipe 0^∞ adalah bentuk tentu.

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$!

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \sin 4x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \dots$ maka bertipe \dots .

Misalkan $y = (1 + \sin 4x)^{\cot x}$, maka $\ln y = \dots$. Sehingga

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$!

Jawab:

Karena $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \sin 4x = \dots$ dan $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \dots$ maka bertipe \dots .

Misalkan $y = (1 + \sin 4x)^{\cot x}$, maka $\ln y = \dots$. Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \dots = 4.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x!$

Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$!

Jawab:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \dots. \text{ Sehingga } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \dots.$$

Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

Teorema Nilai Rata-rata Cauchy

Misalkan f dan g kontinu pada interval tutup $[a, b]$ dan terdiferensialkan pada interval buka (a, b) . Jika $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Contoh Soal

1. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, tunjukkan bahwa

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x, \text{ untuk } x \neq 0.$$

Jawab:

Contoh Soal

1. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, tunjukkan bahwa

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x, \text{ untuk } x \neq 0.$$

Jawab:

$$f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \frac{x^2}{2},$$

Contoh Soal

1. Dengan menggunakan Teorema Nilai Rata-rata Cauchy, tunjukkan bahwa

$$1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x, \text{ untuk } x \neq 0.$$

Jawab:

$$f(x) = 1 - \cos x, g(x) = \frac{x^2}{2}, \text{ diperoleh}$$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \frac{\sin c}{c} < 1,$$

untuk beberapa $c \in (0, x)$.

Fungsi Monoton

Definisi fungsi monoton

Misalkan f terdefinisi pada interval I , maka:

1. f disebut **fungsi monoton naik** (kuat) pada I jika untuk setiap pasangan a dan b dalam I berlaku

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$$

2. f disebut **fungsi monoton turun** (kuat) pada I jika untuk setiap pasangan a dan b dalam I berlaku

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b).$$

Definisi fungsi monoton (Lanjutan)

3. f **monoton tak turun** pada I jika untuk setiap pasangan a dan b dalam I berlaku

$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

4. f **monoton tak naik** pada I jika untuk setiap pasangan a dan b dalam I berlaku

$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b).$$

Teorema kemonotonan

Misalkan f kontinu pada I dan terdiferensialkan di semua titik interior dari I .

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik interior I maka f adalah fungsi naik pada I .
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik interior I maka f adalah fungsi turun pada I .

Contoh Soal

1. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$. Tentukan dimana f terjadi kenaikan dan dimana f terjadi penurunan!

Contoh Soal

1. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$. Tentukan dimana f terjadi kenaikan dan dimana f terjadi penurunan!

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2).$$



Contoh Soal

2. Misalkan $g(x) = x/(1 + x^2)$. Tentukan dimana g terjadi kenaikan dan dimana g terjadi penurunan!

Contoh Soal

2. Misalkan $g(x) = x/(1 + x^2)$. Tentukan dimana g terjadi kenaikan dan dimana g terjadi penurunan!

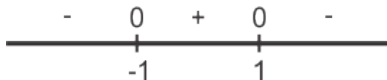
$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}.$$

Contoh Soal

2. Misalkan $g(x) = x/(1 + x^2)$. Tentukan dimana g terjadi kenaikan dan dimana g terjadi penurunan!

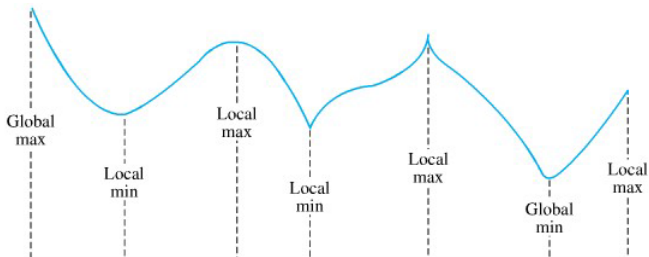
$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}.$$

Perhatikan bahwa $(1 + x^2)^2$ definit positif, sehingga $g(x)$ memiliki tanda yang sama untuk pembilang $(1 - x)(1 + x)$.



Uji Turunan Pertama dan Kedua

Perhatikan gambar berikut.



Definisi

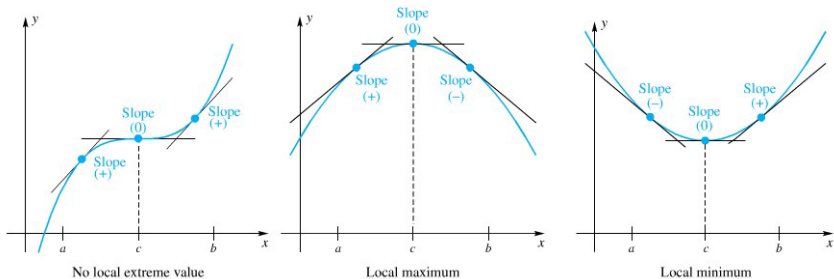
Misalkan S adalah domain fungsi f dan $c \in S$, maka

1. $f(c)$ adalah **nilai maksimum lokal** pada (a, b) jika $f(c)$ merupakan nilai maksimum pada $(a, b) \cap S$.
2. $f(c)$ adalah **nilai minimum lokal** pada (a, b) jika $f(c)$ merupakan nilai minimum pada $(a, b) \cap S$.
3. $f(c)$ adalah **nilai ekstrim lokal** f jika merupakan nilai maksimum lokal atau nilai minimum lokal.

Teorema Uji Turunan Pertama

Misalkan f kontinu pada interval buka (a, b) dan $c \in (a, b)$ merupakan titik kritis.

1. Jika $f'(x) > 0 \forall x \in (a, c)$ dan $f'(x) < 0 \forall x \in (c, b)$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f .
2. Jika $f'(x) < 0 \forall x \in (a, c)$ dan $f'(x) > 0 \forall x \in (c, b)$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f .
3. Jika $f'(x)$ memiliki tanda yang sama (sama-sama positif atau sama-sama negatif) untuk kedua sisi c , maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim dari f .



Uji Turunan Kedua

Misalkan f' dan f'' ada di setiap titik dalam interval buka (a, b) yang mengandung c . Misalkan $f'(c) = 0$.

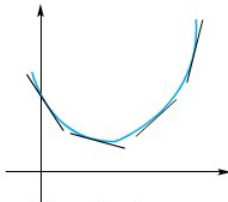
1. Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal dari f .
2. Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal dari f .

Fungsi Cekung

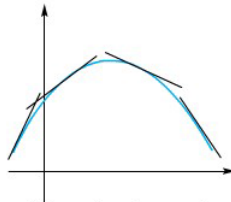
Fungsi cekung

Misalkan f terdiferensialkan pada interval buka I , maka:

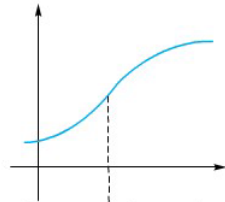
1. f dikatakan **cekung ke atas** pada I , jika f' monoton naik pada I .
2. f dikatakan **cekung ke bawah** pada I , jika f' monoton turun pada I .



f' increasing: Concave up



f' decreasing: Concave down



Concave up Concave down

Teorema kecekungan

Misalkan f terdiferensialkan dua kali pada interval buka I , maka:

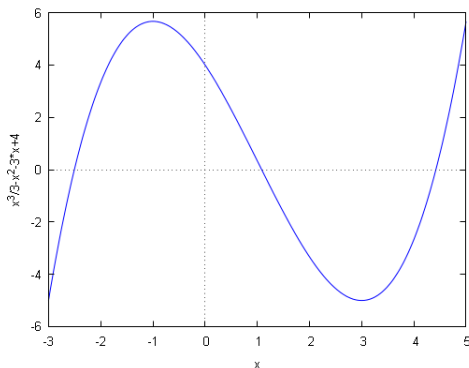
1. Jika $f''(x) > 0 \forall x \in I$, maka f cekung ke atas pada I .
2. Jika $f''(x) < 0 \forall x \in I$, maka f cekung ke bawah pada I .

Contoh Soal

1. Tentukan dimana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ terjadi kenaikan, penurunan, cekung ke atas, dan cekung ke bawah!

Contoh Soal

1. Tentukan dimana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ terjadi kenaikan, penurunan, cekung ke atas, dan cekung ke bawah!

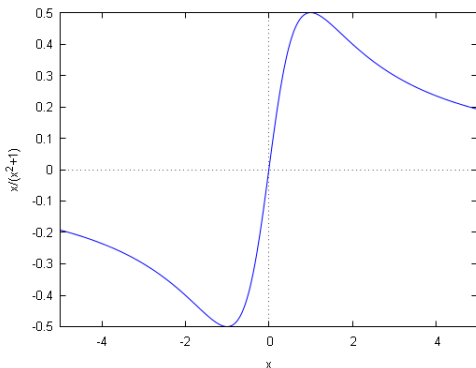


Contoh Soal

2. Tentukan dimana $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ terjadi kenaikan, penurunan, cekung ke atas, dan cekung ke bawah!

Contoh Soal

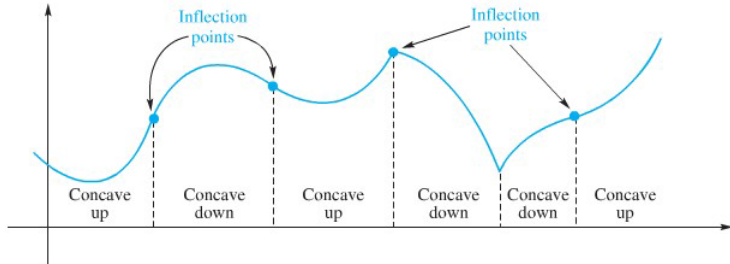
2. Tentukan dimana $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ terjadi kenaikan, penurunan, cekung ke atas, dan cekung ke bawah!



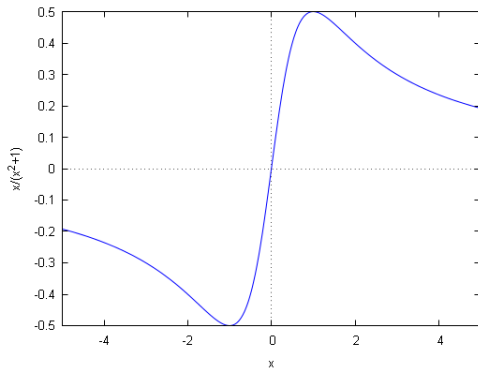
Titik Belok

Titik belok

Misalkan f kontinu di c , maka titik $(c, f(c))$ adalah **titik belok** f jika f cekung ke atas pada satu sisi c dan cekung ke bawah pada sisi lainnya.



Perhatikan bahwa fungsi berikut memiliki 3 titik belok.



Contoh Soal

1. Tentukan semua titik belok fungsi $f(x) = x^{1/3} + 2$!

Contoh Soal

1. Tentukan semua titik belok fungsi $f(x) = x^{1/3} + 2!$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

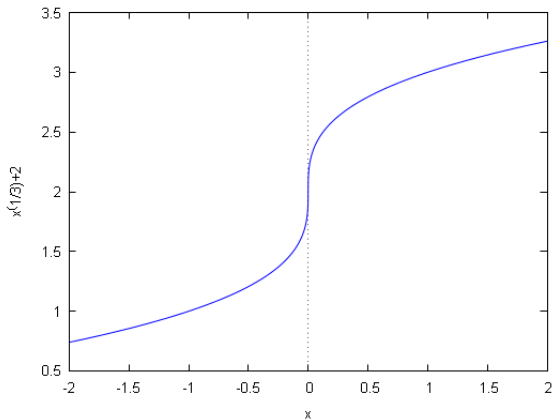
$$f''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}.$$

Contoh Soal

1. Tentukan semua titik belok fungsi $f(x) = x^{1/3} + 2$!

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}.$$

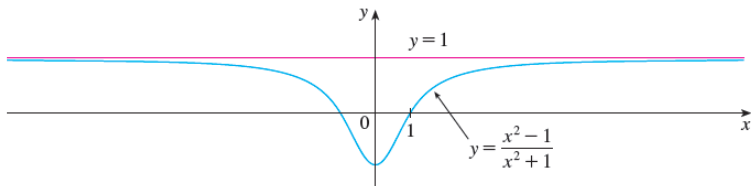
Nilai $f''(x)$ tidak pernah 0. Titik $(0, 2)$ adalah titik belok karena $f''(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) < 0$ untuk $x > 0$.



Asimtot Horisontal

Perhatikan nilai fungsi $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ berikut.

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0,600000
± 3	0,800000
± 50	0,999200
± 100	0,999800
± 1000	0,999988



Semakin besar nilai x , maka nilai $f(x)$ akan mendekati 1. Dalam hal ini,

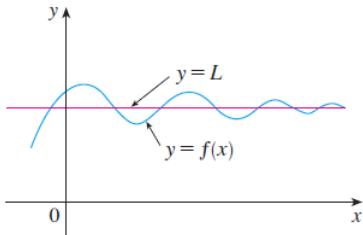
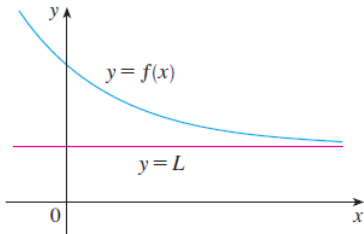
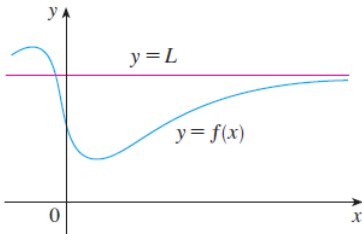
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Definisi

Misalkan f terdefinisi pada (a, ∞) , maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

mengartikan bahwa nilai $f(x)$ akan mendekati L untuk nilai x yang cukup besar.

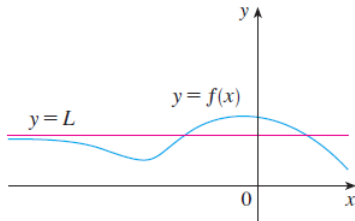
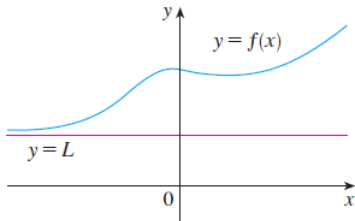


Definisi

Misalkan f terdefinisi pada $(-\infty, a)$, maka

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

mengartikan bahwa nilai $f(x)$ akan mendekati L untuk nilai x yang cukup negatif besar.



Teorema

Misalkan $r > 0$ adalah bilangan rasional, maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Jika $r > 0$ adalah bilangan rasional sedemikian sehingga x^r terdefinisi untuk semua x , maka

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^r} = 0.$$

Contoh Soal

1. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$ dan $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$!

Jawab:

Perhatikan ketika x meningkat, nilai $1/x$ akan menurun.

$$\frac{1}{100} = 0,01$$

$$\frac{1}{10000} = 0,0001$$

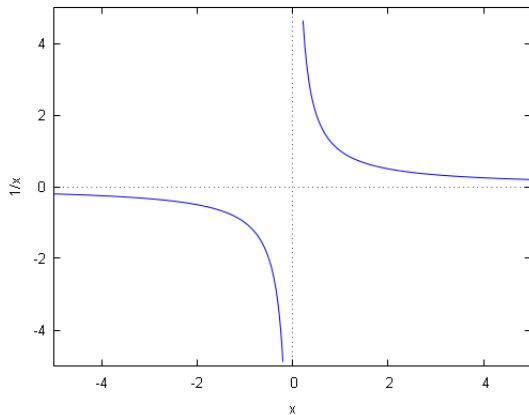
$$\frac{1}{1000000} = 0,000001.$$

Dalam hal ini, nilai $1/x$ mendekati 0. Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dengan alasan yang sama, diperoleh

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$



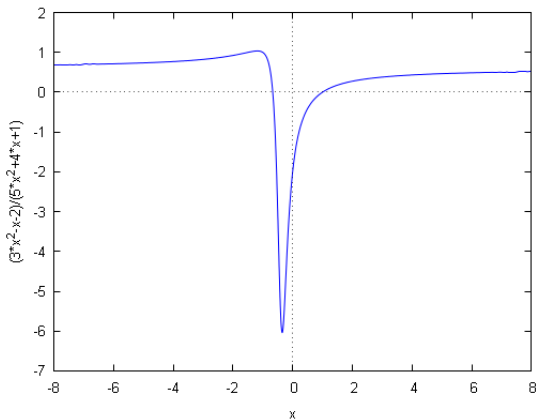
Contoh Soal

2. Tentukan asimtot horisontal dan vertikal dari $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$!
Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan asimtot horisontal dan vertikal dari $f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$!
Jawab:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{3}{5}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{3}{5}.$$



Contoh Soal

3. Tentukan asimtot horisontal dan vertikal dari $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$!
Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan asimtot horisontal dan vertikal dari $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$!

Jawab:

Karena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \dots = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

maka $y = \sqrt{2}/3$ adalah asimtotik horisontal grafik f .

Selanjutnya hitung limit $x \rightarrow -\infty$. Untuk $x < 0$,

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x} = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{-\sqrt{x^2}} = -\sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2}} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}.$$

Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}}{3 - \frac{5}{x}} = \frac{-\sqrt{2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}}{3 - 5 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

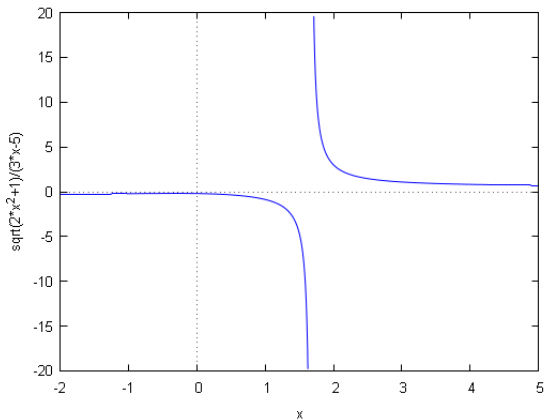
Oleh karena itu, $y = -\sqrt{2}/3$ juga asimtot horisontalnya.

Asimtot vertikal terjadi ketika penyebutnya menuju 0. Jika $x \rightarrow \frac{5}{3}$ dan $x > \frac{5}{3}$,

$$\lim_{x \rightarrow (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty.$$

Sebaliknya, jika $x \rightarrow \frac{5}{3}$ dan $x < \frac{5}{3}$,

$$\lim_{x \rightarrow (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty.$$



Contoh Soal

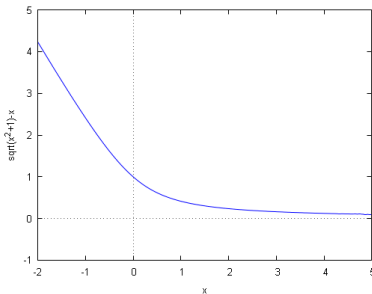
4. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x!$

Jawab:

Contoh Soal

4. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 1} - x!$

Jawab:



Contoh Soal

5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)!$

Jawab:

Contoh Soal

5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$!

Jawab:

Salah jika menulisnya

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty - \infty.$$

Contoh Soal

5. Tentukan $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x)$!

Jawab:

Salah jika menulisnya

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty - \infty.$$

Tetapi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(x - 1) = \infty.$$

Contoh Soal

1. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$!

Jawab:

Contoh Soal

1. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{3x^5 - 20x^3}{32}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa $f(-x) = -f(x)$, maka f adalah fungsi ganjil. Oleh karena itu grafiknya simetri terhadap titik asal.

Dengan menetapkan $f(x) = 0$ diperoleh akar-akarnya yaitu 0 dan $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2,6$.

Dengan menggunakan teknik diferensiasi, diperoleh

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x - 2)(x + 2)}{32}.$$

Maka titik-titik stasionernya adalah -2 , 0 , dan 2 .

Nilai $f'(x) > 0$ pada $(-\infty, -2)$ dan $(2, \infty)$. Nilai $f'(x) < 0$ pada $(-2, 0)$ dan $(0, 2)$. Melalui informasi ini, dapat diketahui dimana f terjadi kenaikan dan penurunan.

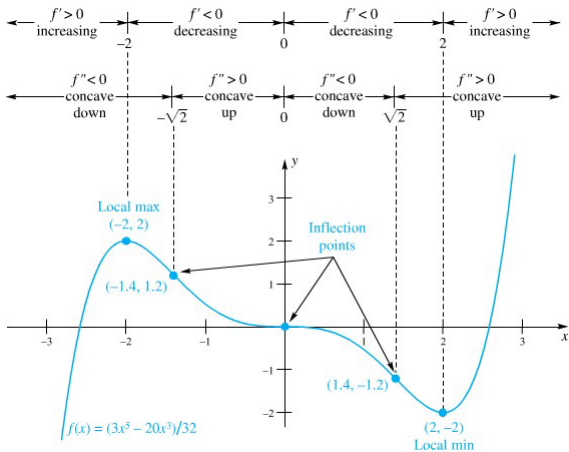
$$f(-2) = 2, \quad f(0) = 0, \quad f(2) = -2.$$

Maka 2 adalah maksimum lokal, sedangkan -2 adalah minimum lokalnya.

Diferensialkan lagi, diperoleh

$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32} = \frac{15x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{8}.$$

Dengan menggunakan uji tanda untuk $f''(x)$, diperoleh bahwa f cekung ke atas pada $(-\sqrt{2}, 0)$ dan $(\sqrt{2}, \infty)$, dan f cekung ke bawah pada $(-\infty, -\sqrt{2})$ dan $(0, \sqrt{2})$. Sehingga terdapat 3 titik belok, yaitu $(-\sqrt{2}, 7\sqrt{2}/8) \approx (-1, 4; 1, 2)$, $(0, 0)$, dan $(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8) \approx (1, 4; -1, 2)$.



Contoh Soal

2. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$!

Jawab:

Contoh Soal

2. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$!

Jawab:

Domainnya adalah

$$\{x|x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

Contoh Soal

2. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$!

Jawab:

Domainnya adalah

$$\{x|x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

$$f(x=0) = 0.$$

Contoh Soal

2. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$!

Jawab:

Domainnya adalah

$$\{x|x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

$$f(x=0) = 0.$$

$f(-x) = f(x)$, maka f adalah fungsi genap. Kurva akan simetris terhadap sumbu y .

Contoh Soal

2. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$!

Jawab:

Domainnya adalah

$$\{x|x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty).$$

$$f(x=0) = 0.$$

$f(-x) = f(x)$, maka f adalah fungsi genap. Kurva akan simetris terhadap sumbu y .

Karena

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2,$$

maka $y = 2$ adalah asimtot horisontalnya.

Penyebutnya = 0 ketika $x = \pm 1$, selanjutnya hitung limit berikut

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty.$$

Sehingga $x = 1$ dan $x = -1$ adalah asimtot vertikalnya.

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)(4x) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

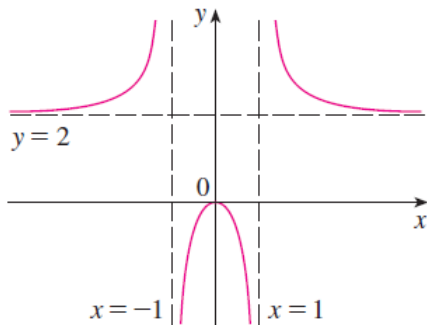
Karena $f'(x) > 0$ ketika $x < 0 (x \neq -1)$ dan $f'(x) < 0$ ketika $x > 0 (x \neq 1)$, maka f naik pada $(-\infty, -1)$ dan $(-1, 0)$ dan turun pada $(0, 1)$ dan $(1, \infty)$.

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(-4) + 4x \cdot 2(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}.$$

Karena $12x^2 + 4 > 0$ untuk semua x , maka

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$$

dan $f''(x) < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$. Oleh karena itu, kurvanya cekung ke atas pada interval $(-\infty, -1)$ dan $(1, \infty)$, dan cekung ke bawah pada $(-1, 1)$. Dalam hal ini, tidak ada titik belok karena 1 dan -1 bukan domain f .



Contoh Soal

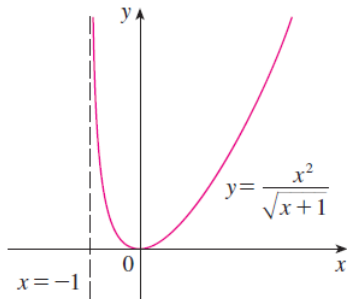
3. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$!

Jawab:

Contoh Soal

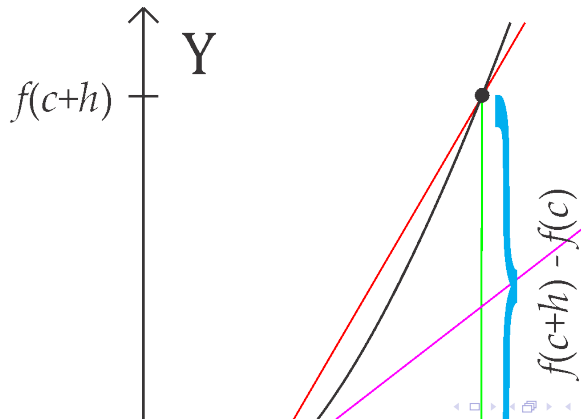
3. Sketsalah grafik $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$!

Jawab:



Penaksiran

Perhatikan kembali gambar berikut:



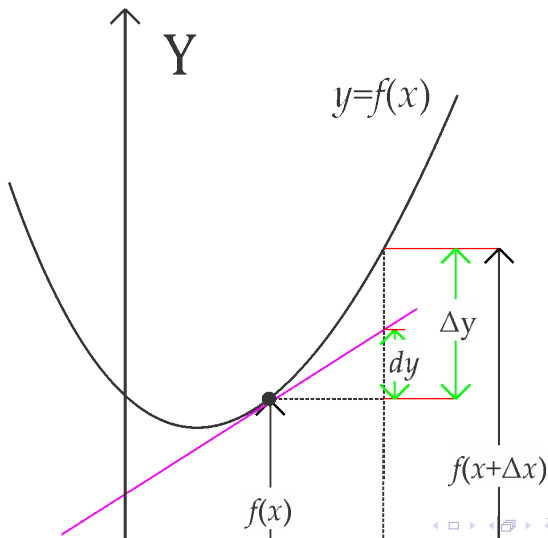
Untuk nilai h yang kecil, nilai $\frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ mendekati $f'(c)$, sehingga

$$f(c+h) - f(c) \approx h \cdot f'(c).$$

Definisi Diferensial

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi terdiferensialkan dari variabel x .

1. Δx adalah peningkatan sebarang dalam variabel x .
2. dx disebut diferensial dari variabel x , adalah sama dengan Δx .
3. Δy adalah perubahan sebenarnya dalam variabel y ketika variabel x berubah dari x ke $x + \Delta x$, yaitu $y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. dy disebut diferensial variabel y , yang didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$.



Contoh Soal

1. Tentukan nilai taksiran untuk $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$!
Gunakan $y = \sqrt{x}$ dan ingat bahwa $\sqrt{4} = 2$ dan $\sqrt{9} = 3$.

Contoh Soal

1. Tentukan nilai taksiran untuk $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$!
Gunakan $y = \sqrt{x}$ dan ingat bahwa $\sqrt{4} = 2$ dan $\sqrt{9} = 3$.

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Ketika $x = 4$ dan $dx = 0,6$ diperoleh

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0,6)$$

maka $\sqrt{4,6} \approx \sqrt{4} + dy = \dots$.

Oleh karena itu, $\sqrt{8,2} \approx \dots$.

Contoh Soal

2. Gunakan diferensial untuk menaksir peningkatan luas permukaan bola ketika radiusnya meningkat dari 3cm menjadi $3,025\text{cm}$.
Jawab:

Contoh Soal

2. Gunakan diferensial untuk menaksir peningkatan luas permukaan bola ketika radiusnya meningkat dari 3cm menjadi $3,025\text{cm}$.

Jawab:

Luas permukaan bola (L) = $4\pi r^2$, diperoleh $dL = 8\pi r dr$.

Contoh Soal

2. Gunakan diferensial untuk menaksir peningkatan luas permukaan bola ketika radiusnya meningkat dari 3cm menjadi $3,025\text{cm}$.

Jawab:

Luas permukaan bola (L) = $4\pi r^2$, diperoleh $dL = 8\pi r dr$.

Ketika $r = 3$ dan $dr = \Delta r = 0,025$, maka

$$dL \approx \dots$$

Contoh Soal

3. Ukuran rusuk suatu kubus ketika diukur adalah 11,4 cm dengan error pengukuran $\pm 0,05$ cm. Hitung volume kubus dan berikan estimasi untuk errornya!

Jawab:

Contoh Soal

3. Ukuran rusuk suatu kubus ketika diukur adalah 11,4 cm dengan error pengukuran $\pm 0,05$ cm. Hitung volume kubus dan berikan estimasi untuk errornya!

Jawab:

Misalkan x adalah panjang rusuk kubus, maka $V = x^3$. Jadi $dV = 3x^2 dx$. Jika $x = 11,4$ dan $dx = 0,05$, maka $V = (11,4)^3 \approx 1482$ dan

$$\Delta V \approx dV = 3(11,4)^2(0,05) \approx 19.$$

Sehingga volume kubus adalah 1482 ± 19 cm³.

Contoh Soal

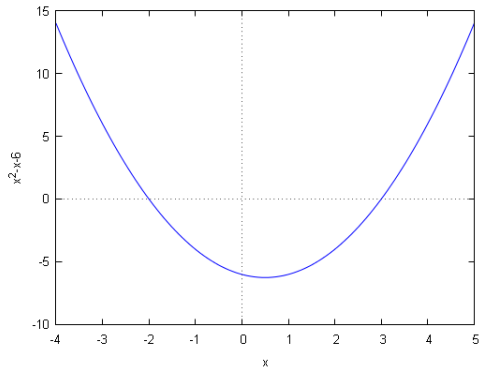
4. Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi $f(1) = 10$ dan $f'(1, 02) = 12$. Tentukan taksiran untuk $f(1, 02)$!

Contoh Soal

5. Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi $f(3) = 8$ dan $f'(3,05) = 1/4$. Tentukan taksiran untuk $f(3,05)$!

Metode Newton

Pandang fungsi $y = x^2 - x - 6$ yang memiliki akar-akar yaitu $x = -2$ dan $x = 3$. Perhatikan bahwa $y = f(x)$ terdiferensialkan dan memiliki garis singgung di setiap titik pada domain interval tutup.



Metode Newton

Misalkan $f(x)$ terdiferensialkan dan x_1 adalah aproksimasi awal terhadap akar \tilde{x} dari $f(x) = 0$. Untuk $n = 1, 2, \dots$ barisan berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

akan konvergen ke \tilde{x} , ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}.$$

Sistem Bilangan Real
Sistem Koordinat
Fungsi
Limit
Kekontinuan
Turunan
Aplikasi Turunan
Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Maksimum dan Minimum
Teorema Nilai Rata-rata
Aturan L'Hospital
Fungsi Monoton
Uji Turunan Pertama dan Kedua
Fungsi Cekung
Titik Belok
Asintot
Penggambaran Grafik
Penaksiran

Sumber: Wikipedia

Contoh Soal

1. Dengan inialisasi $x_1 = 2$, tentukan aproksimasi ketiga (x_3) untuk akar persamaan $x^3 - 2x - 5 = 0$!

Jawab:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \text{ dan } f'(x) = 3x^2 - 2.$$

Contoh Soal

1. Dengan inialisasi $x_1 = 2$, tentukan aproksimasi ketiga (x_3) untuk akar persamaan $x^3 - 2x - 5 = 0$!

Jawab:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \text{ dan } f'(x) = 3x^2 - 2.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}.$$

Contoh Soal

1. Dengan inialisasi $x_1 = 2$, tentukan aproksimasi ketiga (x_3) untuk akar persamaan $x^3 - 2x - 5 = 0$!

Jawab:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 \text{ dan } f'(x) = 3x^2 - 2.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}.$$

Untuk $n = 1$, diperoleh $x_2 = \dots = 2, 1$.

Untuk $n = 2$, diperoleh $x_3 = \dots \approx 2, 0946$.

Contoh Soal

2. Tentukan $\sqrt[6]{2}$ dengan pendekatan sampai 8 desimal!
Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan $\sqrt[6]{2}$ dengan pendekatan sampai 8 desimal!

Jawab:

$$f(x) = x^6 - 2, \text{ dan } f'(x) = 6x^5.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\sqrt[6]{2}$ dengan pendekatan sampai 8 desimal!

Jawab:

$$f(x) = x^6 - 2, \text{ dan } f'(x) = 6x^5.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}.$$

Contoh Soal

2. Tentukan $\sqrt[6]{2}$ dengan pendekatan sampai 8 desimal!

Jawab:

$$f(x) = x^6 - 2, \text{ dan } f'(x) = 6x^5.$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}.$$

Diperoleh $x_6 \approx 1,12246205$. Sehingga $\sqrt[6]{2} \approx 1,12246205$.

Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Perhatikan fungsi yang direpresentasikan oleh deret pangkat berikut:

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + c_4(x - a)^4 + \cdots ,$$

dengan $|x - a| < R$. Ketika $x = a$, diperoleh $f(a) = c_0$.

Dengan teknik diferensiasi, turunan pertama dari deret tersebut dinyatakan sebagai:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x - a) + 3c_3(x - a)^2 + 4c_4(x - a)^3 + \cdots ,$$

dengan $|x - a| < R$. Ketika $x = a$, diperoleh $f'(a) = c_1$.

Lagi, dengan teknik diferensiasi, turunan kedua dari deret tersebut dinyatakan sebagai:

$$f''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3(x - a) + 3 \cdot 4c_4(x - a)^2 + \cdots ,$$

dengan $|x - a| < R$. Ketika $x = a$, diperoleh $f''(a) = 2c_2$.

Dengan teknik diferensiasi pula, turunan ketiga dari deret tersebut dinyatakan sebagai:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4(x - a) + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5(x - a)^2 + \dots,$$

dengan $|x - a| < R$. Ketika $x = a$, diperoleh $f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$.

Oleh karena itu, ditemukan suatu pola ketika $x = a$, yaitu

$$f^{(n)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n c_n = n! c_n.$$

Sehingga

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Formula ini juga berlaku untuk $n = 0$, karena $0! = 1$ dan $f^{(0)} = f$.

Teorema

Jika f memiliki suatu perluasan deret pangkat di a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \quad |x - a| < R;$$

maka formula koefisiennya adalah

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Deret Taylor

Dengan mensubstitusi formula koefisien c_n ke deret tersebut, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots \end{aligned}$$

Deret ini disebut **deret Taylor** dari fungsi f di a .

Deret Maclaurin

Secara khusus, ketika $a = 0$, deret Taylor menjadi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots$$

dan deret ini disebut **deret Maclaurin**.

Dalam kasus deret Taylor, jumlahan parsial didefinisikan berikut:

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.\end{aligned}$$

T_n disebut **polinom Taylor berderajat n**. Secara umum, $f(x)$ adalah jumlahan deret Taylor jika

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x).$$

Misalkan $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ sedemikian sehingga

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

maka $R_n(x)$ disebut **sisanya deret Taylor**. Sehingga jika $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - R_n(x)] = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = f(x).$$

Teorema

Jika $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ dengan T_n adalah polinomial Taylor berderajat n dari f di a dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

untuk $|x - a| < R$, maka f sama dengan jumlah dari deret Taylornya pada interval $|x - a| < R$.

Pertidaksamaan Taylor

Jika $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ untuk $|x - a| \leq d$, maka sisa $R_n(x)$ dari deret Taylor memenuhi

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1}$$

untuk $|x - a| \leq d$.

Teorema

Untuk semua bilangan real x berlaku:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Contoh Soal

1. Tentukan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = e^x$ dan radius konvergennya!

Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan deret Maclaurin dari fungsi $f(x) = e^x$ dan radius konvergensinya!

Jawab:

Jika $f(x) = e^x$, maka $f^{(n)}(x) = e^x$ dan $f^{(n)}(0) = 1$ untuk semua n .
Sehingga deret Maclaurinnya adalah

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Untuk menentukan radius konvergenya, misalkan $a_n = \frac{x^n}{n!}$. Maka

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 < 1.$$

Sehingga, dengan uji rasio, deret tersebut konvergen untuk semua x dan radius konvergenya adalah $R = \infty$.

2. Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $\sin x$!

Jawab:

$$f(x) = \sin x, f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x, f'(0) = \dots$$

$$f''(x) = \dots, f''(0) = \dots$$

\vdots

3. Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $\cos x$!

Jawab:

$$f(x) = \cos x, f(0) = 1$$

$$f'(x) = \dots, f'(0) = \dots$$

$$f''(x) = \dots, f''(0) = \dots$$

\vdots

4. Dengan memanfaatkan jawaban soal No. 3, tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = x \cos x$!

Jawab:

5. Tentukan deret Maclaurin untuk fungsi $\ln(x + 1)$!

Jawab: