Kalkulus Elementer

Nanda Arista Rizki, M.Si.

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Mulawarman
2018

Referensi:

1. Dale Varberg, Edwin Purcell, dan Steve Rigdon. (2007). *Calculus*, edisi ke 9.
2. James Stewart. (2015). *Calculus*, edisi ke 8. Cengage Learning.
3. S. Donevska, B. Donevsky. (2006). *Calculus and Analytic Geometry*. Technical university of Sofia.

Pertemuan ke 1: Sistem Bilangan Real
Pertemuan ke 2: Sistem Koordinat
Pertemuan ke 3: Fungsi
Pertemuan ke 4: Limit
Pertemuan ke 5: **Kuis Evaluasi**
Pertemuan ke 6: Kekontinuan
Pertemuan ke 7: Turunan
Pertemuan ke 8: UTS

Kalkulus

- Kalkulus (*Calculus*) itu *calculate* atau menghitung
- Kalkulus merupakan studi tentang gerakan dan laju perubahan
- Kalkulus secara umum membahas tentang *change* (perubahan), yang meliputi limit, kontinuitas, fungsi, diferensial, integrasi, dan lain lain.

Himpunan dan Operasi-Operasi Elementernya

Himpunan adalah sekumpulan objek yang memiliki sifat keterkaitan antar anggotanya. Sifat keterkaitan tersebut dinamakan sifat himpunan.

Himpunan dituliskan didalam tanda kurung kurawal. Setiap anggota suatu himpunan disebut elemen (unsur) himpunan yang bersangkutan.

Suatu himpunan biasanya diberi nama dengan huruf besar. Sedangkan anggotanya ditulis dengan huruf kecil.

Dalam himpunan dari 10 bilangan bulat positif yang pertama, maka $\frac{3}{4}$ dan 14 tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

Misalkan C adalah himpunan bilangan real x dimana $0 \leq x \leq 1$, maka $\frac{3}{4}$ adalah elemen himpunan C dan ditulis $\frac{3}{4} \in C$.

Secara umum, $c \in C$ artinya c adalah suatu elemen (anggota) dari himpunan C. Namun jika c bukan merupakan anggota dari himpunan C, maka ditulis $c \notin C$.

Jika setiap elemen dari himpunan C_1 juga merupakan elemen dari himpunan C_2, maka C_1 disebut subset (himpunan bagian) dari C_2 dan ditulis $C_1 \subset C_2$.

Contohnya, $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3\}$.
Jelas bahwa $A \subset B$.
Contoh lainnya,

$$C = \{1, 2, 3\}$$

ditulis $C \subset A$.

Ingat bahwa jika $C_1 \subset C_2$ dan $C_2 \subset C_1$, maka kedua himpunan tersebut memiliki elemen-elemen yang sama, ditulis $C_1 = C_2$.

Contoh Soal

Buatlah hubungan antara dua himpunan berikut:

1. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ dan $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 99\}$
2. $G = \{(m, n) | m + n = 4; m = 1, 2, 3; n = 1, 2, 3\}$ dan $H = \{(a, b) | a = 1, 2, 3; b = 1, 2, 3\}$.
   Catatan: (a, b) adalah pasangan bilangan real.
3. $M = \{$Samsung Galaxy S9, Samsung Galaxy Note 8, Samsung Galaxy A8, iPhone 8, iPhone X$\}$, dan
   $N = \{$Produk-produk Samsung dan Apple$\}$.

Jika ada elemen-elemen himpunan C_1 yang juga merupakan elemen-elemen himpunan C_2, maka elemen-elemen yang sama tersebut dinamakan himpunan irisan dan ditulis $C_1 \cap C_2$.

Namun jika elemen-elemen C_3 merupakan elemen dari himpunan C_1 **atau** C_2, maka C_3 disebut himpunan gabungan dan ditulis $C_3 = C_1 \cup C_2$.

Contohnya, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0, 1, 2, 8\}$, maka $A \cap B = \{1, 2\}$ adalah irisan dari himpunan A dan B. Sedangkan $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8\}$ adalah gabungan dari himpunan A dan B.

Jika suatu himpunan C tidak memiliki elemen, maka C disebut himpunan kosong dan ditulis $C = \emptyset$. Himpunan kosong juga bisa ditulis dengan $\{\}$. Perlu diingat juga bahwa himpunan kosong $\emptyset$ merupakan subset dari semua himpunan. Himpunan gabungan dari semua himpunan disebut himpunan semesta Ω. Jelas bahwa $\emptyset \subset \Omega$.

Himpunan komplemen adalah himpunan yang elemen-elemennya tidak ada di himpunan tersebut namun ada di himpunan semestanya. Misalkan C adalah himpunan, maka komplemennya adalah C^c.

Dalam teori himpunan, dikenal juga hukum DeMorgan. Misal C_1 dan C_2 adalah dua himpunan, maka berlaku:

$$(C_1 \cap C_2)^c = C_1^c \cup C_2^c \tag{1}$$

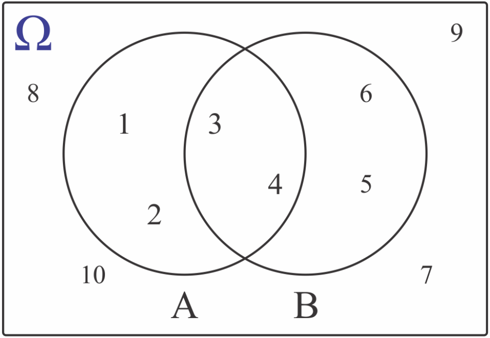
$$(C_1 \cup C_2)^c = C_1^c \cap C_2^c \tag{2}$$

Jika $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, maka C_1 dan C_2 saling lepas.

Misalkan C_3 adalah himpunan lain, maka berlaku hukum distributif:

$$\begin{aligned} C_1 \cap (C_2 \cup C_3) &= (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_3) \\ C_1 \cup (C_2 \cap C_3) &= (C_1 \cup C_2) \cap (C_1 \cup C_3). \end{aligned}$$

Hubungan antar himpunan dapat direpresentasikan dalam diagram Venn. Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{3, 4, 5, 6\}$ dengan Ω adalah bilangan bulat dari 1 sampai 10.



Gambar: Diagram venn

Contoh Soal

4. Misalkan A adalah empat bilangan prima pertama dan B adalah faktor prima dari 10, dengan himpunan semesta $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$. Tentukan:
   a) $A \cap B$
   b) $A \cup B$
   c) $A \cap B^c$
   d) $(A \cup B^c)^c$

Contoh Soal

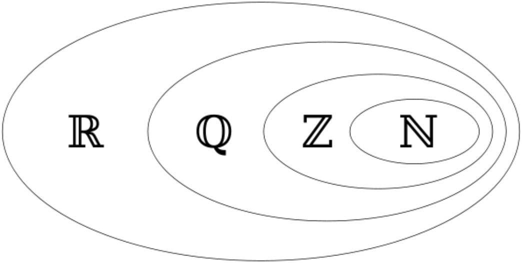
5. Jelaskan penggunaan simbol-simbol matematika berikut:
   - $\forall$
   - $\exists$
   - $\exists!$
   - $\ni$
   - $\in$
   - $\subset$
   - $\subseteq$
   - $\cap$
   - $\cup$
   - $\mathbb{R}$
   - $\mathbb{N}$
   - ∞

Sistem Bilangan Real

Kalkulus itu berdasarkan sistem bilangan Real dan sifat-sifatnya.

Sistem bilangan yang perlu diketahui

1. Himpunan bilangan asli (natural) disimbolkan $\mathbb{N}$.
   $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
2. Himpunan bilangan bulat (integer) disimbolkan $\mathbb{Z}$.
   $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
3. Himpunan bilangan rasional disimbolkan $\mathbb{Q}$.
   Contohnya: $2, 1/2, -11/22, 22/7, \ldots$
4. Himpunan bilangan real disimbolkan $\mathbb{R}$.
   Contohnya: $0, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \pi, 2\pi, \ldots$



Jelas bahwa $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Bilangan real adalah penyempurnaan dari bilangan rasional. Bilangan rasional adalah bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk pecahan

$$\frac{m}{n},$$

dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ dan $n \neq 0$. Bilangan rasional mempunyai bentuk desimal yang berulang atau bentuk desimal yang berhenti. Contohnya:

$$\frac{2}{3} = 0,66666666\ldots; \qquad \frac{3}{8} = 0,375.$$

Contoh Soal

6. Tunjukkan bahwa $0,66666666\ldots$ adalah bilangan rasional!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Tunjukkan bahwa $0,66666666\ldots$ adalah bilangan rasional!

   Jawab:

   Misal $x = 0,66666666\ldots$, maka

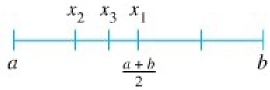
$$\begin{aligned} 10x &= 6,66666666\ldots \\ 10x &= 6 + 0,66666666\ldots \\ 10x &= 6 + x \\ 9x &= 6 \\ x &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Contoh Soal

7. Apakah bilangan-bilangan berikut adalah rasional?
   1. $0,123123123...$
   2. $4,5678$
   3. $8,880880881...$
   4. $5,112233445...$
   5. $\sqrt{2} = 1,4142135623...$
   6. $\pi = 3,1415926535...$

Kerapatan Bil. Real

Setiap 2 bil. Real, selalu ada bil. Real lain yang berada di antaranya. Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $x_1 = \frac{(a+b)}{2}$, maka $a < x_1 < b$ atau dapat ditulis $x_1 \in (a, b)$. Faktanya $x_1 \in \mathbb{R}$, maka di antara a dan x_1 juga terdapat bilangan $x_2 = \frac{(a+x_1)}{2}$ yang juga bil. Real.

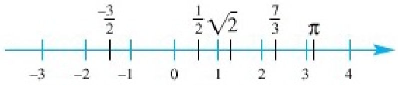


Gambar: Ilustrasi

Garis Bilangan

Terdapat korespondensi satu-satu antara $\mathbb{R}$ dan garis lurus, bahwa setiap bilangan Real dapat digambarkan sebagai titik pada garis dan setiap titik dapat dinyatakan oleh bilangan Real.

Bilangan Real bisa digambarkan secara geometri melalui garis bilangan.



Interval (selang)

Suatu ruas garis pada garis bilangan dinamakan selang hingga. Suatu selang hingga mempunyai batas atas dan batas bawah. Selang tak hingga hanya diperoleh dalam kasus garis yang tak tebatas.

Selang yang tidak memuat titik batasnya dinamakan selang buka dan yang memuat semua titik batasnya dinamakan selang tutup.

Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	

Set Notation	Interval Notation	Graph
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	

Contoh soal

8. Tentukan himpunan penyelesaian ketidaksamaan berikut dan nyatakan dalam notasi selang!
   a) $2x - 5 \leq 4x - 3$
   b) $-2 < 4x - 3 < 9$
   c) $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
   d) $4x^2 - 5x - 6 < 0$.

Pertidaksamaan

Aksioma urutan

Pada $\mathbb{R}$ terdapat himpunan $P \subseteq \mathbb{R}$ yang memenuhi:

1. Jika $a \in \mathbb{R}$, maka atau $a = 0$, atau $a \in P$, atau $-a \in P$.
2. Jika $a, b \in P$, maka $a + b \in P$ dan $ab \in P$.

Dalam hal ini P adalah himpunan bilangan positif.

Secara umum, jika $x < y$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$. Maka $y - x$ adalah bilangan positif atau ditulis $y - x > 0$. Dalam hal ini, $x < y$ artinya sama dengan $y > x$.

Contohnya $1 < 2$, maka $2 - 1 = 1 > 0$. Oleh karena itu pada garis bilangan real, angka 1 berada disebelah kiri angka 2.

Teorema

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{R}$,

1. pasti berlaku salah satu berikut:
    - $a < b$
    - $a = b$
    - $a > b$.
2. jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a < c$ (sifat transitif).
3. $a < c \Leftrightarrow a + b < c + b$ (tidak memperhatikan nilai b).
4. $a > 0, b < c \Leftrightarrow ab < ac$
   $a < 0, b < c \Leftrightarrow ab > ac$.
5. Jika $0 < a < b$ dan $0 < c < d$, maka $ac < bd$.
6. Jika $0 < a < b$ atau $a < b < 0$, maka $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Nilai Mutlak

Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Harga mutlak dari x, ditulis

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Contohnya $|-1| = 1$, $|2| = 2$, $|0| = 0$.

Arti geometri dari $|x|$ adalah jarak x ke 0 pada garis real $\mathbb{R}$. Perlu diingat bahwa jarak dari x ke y pada garis bilangan adalah $|x-y|$.

Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$, maka

1. $\sqrt{a^2} = |a|$
2. untuk $c > 0$,
   - $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c \Leftrightarrow a^2 \leq c^2$
   - $|a| \geq c \Leftrightarrow a \geq c$ atau $a \leq -c \Leftrightarrow a^2 \geq c^2$
3. $|ab| = |a||b|$
4. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketidaksamaan segitiga)
6. $|a - b| \geq ||a| - |b||$ (ketidaksamaan segitiga)

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x-2|$?
   Jawab:

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x-2|$?
   Jawab:

$$
\begin{aligned}
|x-2| &= \begin{cases} -(x-2), & (x-2) < 0 \\ (x-2), & (x-2) \geq 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

9. Misalkan $x \in \mathbb{R}$. Berapakah nilai dari $|x-2|$?
Jawab:

$$|x-2| = \begin{cases} -(x-2), & (x-2) < 0 \\ (x-2), & (x-2) \geq 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2-x, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2. \end{cases}$$

Sebagai ilustrasi, misal $x = -\frac{1}{2}$. Karena $x < 2$, maka

$$|-\frac{1}{2} - 2| = 2 - (-\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$$

atau $|x-2| = |-\frac{1}{2} - 2| = |-2\frac{1}{2}| = 2\frac{1}{2}$.

Contoh Soal

10. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$!
    Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan solusi dari pertidaksamaan $|3x - 5| \geq 1$!
Jawab:
Persamaan tersebut dapat ditulis menjadi

$$3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2.$$

Sehingga himpunan penyelesaiannya adalah gabungan dari dua interval yaitu

$$\left(-\infty, \frac{4}{3} \right] \bigcup [2, \infty) .$$

Contoh Soal

11. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tunjukkan bahwa

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon.$$

Jawab:

Contoh Soal

11. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tunjukkan bahwa

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon.$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} &\Leftrightarrow 5|x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5||x-2| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5(x-2)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tentukan bil. positif δ sedemikian sehingga

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |6x - 18| < \varepsilon.$$

Jawab:

Contoh Soal

12. Misalkan $\varepsilon > 0$. Tentukan bil. positif δ sedemikian sehingga

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon.$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |6x-18| < \varepsilon &\Leftrightarrow |6(x-3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 6|(x-3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Maka $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ atau lebih tepatnya $\delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Contoh Soal

Tentukan nilai x jika:

13. $|x-2| \leq \frac{3}{2}$.
14. $|2x+3| \leq |x-3|$.

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar: $|x-2|<\delta \Rightarrow |5x-10|<1$.

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar: $|x-2| < \delta \Rightarrow |6x-18| < 24$.

Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan bilangan positif δ agar pernyataan berikut benar: $|x-2| < \delta \Rightarrow |6x-18| < 24$.

Jawab:

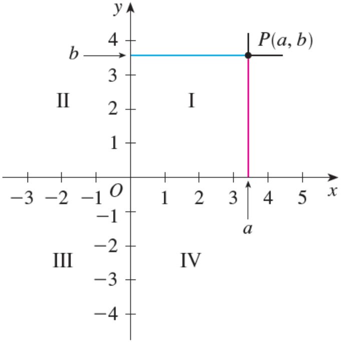
$$\begin{aligned} |x-2| < \delta &\Rightarrow |6x-18| < 24 \\ |x-2| < \delta &\Rightarrow |x-3| < 4 \\ -\delta < x-2 < \delta &\Rightarrow -4 < x-3 < 4 \\ -\delta-1 < x-3 < \delta-1 &\Rightarrow -4 < x-3 < 4. \end{aligned}$$

Maka haruslah $-\delta - 1 > -4$ dan $\delta - 1 < 4$, diperoleh $\delta < 3$ dan $\delta < 5$. Oleh karena itu pilih $\delta < 3$.

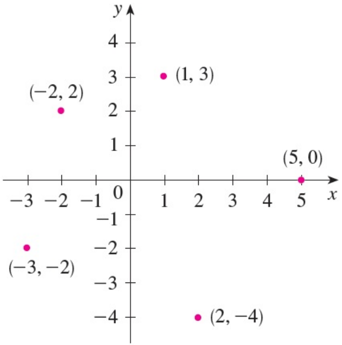
Sistem Koordinat

Titik dalam suatu bidang dapat diidentifikasi dengan pasangan terurut dari bilangan-bilangan real. Bilangan-bilangan real tersebut diurutkan dalam garis real, sehingga pasangan terurutnya terbentuk dari dua garis real. Biasanya, dua garis real tersebut diposisikan untuk berpotongan di titik asal O.

Misalkan dalam suatu bidang, terdapat titik (yang bernama) P yang diletakkan di pasangan (a, b). Dalam hal ini, a disebut koordinat x dari P dan b disebut koordinat y dari P. Titik P disimbolkan dengan $P(a, b)$.



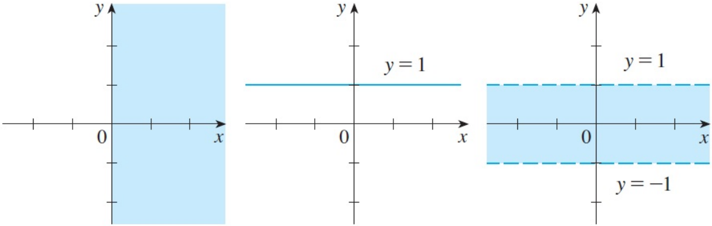
Beberapa titik juga dapat dilabeli dengan koordinatnya seperti gambar berikut



Walaupun notasi yang digunakan sama dengan interval selang buka, namun dapat dikenalinya dari konteks makna yang dimaksud.

Sistem koordinat tersebut dinamakan **sistem koordinat Kartesius**, yang dikenalkan oleh matematikawan Perancis bernama René Descartes (1596-1650). Suatu bidang dalam sistem koordinat ini disebut **bidang Kartesius** yang dinyatakan oleh $\mathbb{R}^2$. Sumbu x dan sumbu y dalam sistem koordinat ini disebut sumbu koordinat, dan dibagi menjadi 4 kuadran (yang dilabeli I, II, III, dan IV).

Berikut skesa daerah yang didefinisikan oleh himpunan pasangan titik.



$\{(x, y) \mid x \geqslant 0\}$ $\{(x, y) \mid y = 1\}$ $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

Contoh Soal

Sketsalah daerah yang didefinisikan oleh:

1. $\{(x,y) | -1 \leq x < 3\}$!
2. $\{(x,y) | -\infty < y \leq 3\}$!
3. $\{(x,y) | -1 < x < 3, -1 < y < 3\}$!
4. $\{(x,y) | -2 < x + y < 6\}$!

Misalkan diberikan dua titik, yaitu $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$. Maka jarak antara dua titik tersebut adalah

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

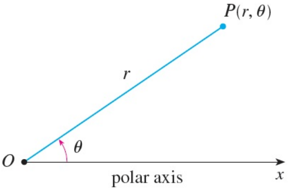
Contoh Soal

Buatlah suatu koordinat kartesius, lalu tentukan jarak antara dua titik berikut:

5. $A(0,0)$ dan $B(4,5)$.
6. $C(-3,-4)$ dan $D(3,4)$.
7. $E(2,-5)$ dan $F(-5,2)$.
8. $G(-6,-7)$ dan $H(-8,-7)$.

Sistem Koordinat Kutub (Polar)

Sistem koordinat selanjutnya adalah sistem koordinat kutub, yang dikenalkan oleh Newton. Dimulai dari memilih titik *pole* (atau asal) dalam bidang yang dilabeli dengan O. Lalu menggambarnya dari titik O yang disebut *polar axis*. Biasanya *polar axis* (sumbu kutub) digambar secara horisontal ke kanan.



Jika P adalah titik lain dalam bidang tersebut, r menyatakan jarak dari titik O ke titik P, dan θ adalah sudut antara sumbu kutub dan garis OP; Maka titik P dinyatakan oleh pasangan terurut (r, θ), dan disebut koordinat kutub dari P.

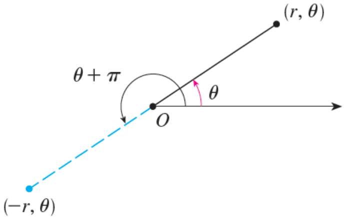
Sistem koordinat ini menggunakan sudut yang dapat diukur baik dalam satuan derajat maupun radian (rad). Dalam hal ini,

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ.$$

Derajat	0°	30°	45°	60°	90°	120°
Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$

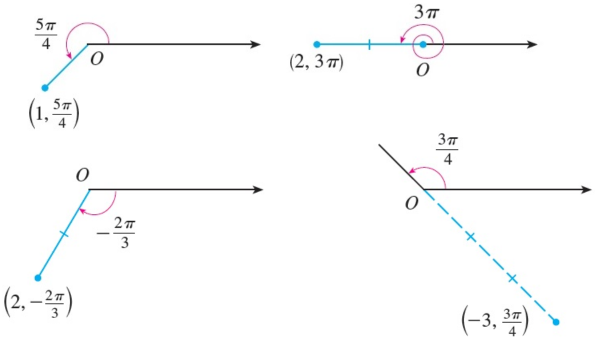
Derajat	135°	150°	180°	270°	360°
Radian	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$3\pi/2$	2π

Biasanya ada kesepakatan bahwa suatu sudut itu positif jika diukur dalam arah yang berlawanan dengan arah jarum jam, dan bernilai negatif jika diukur sebaliknya. Jika $P = O$, maka $r = 0$ dan titik $(0, \theta)$ menyatakan *pole* (kutub) untuk setiap θ.

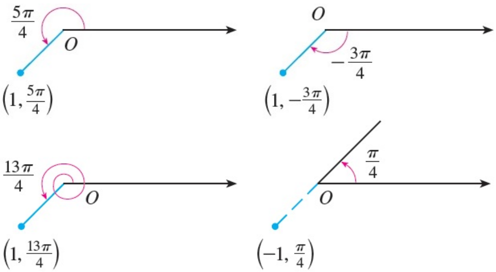


Titik $(-r, \theta)$ dan (r, θ) berada pada garis yang sama yang melalui titik O dan kedua titik tersebut memiliki jarak yang sama dari O (yaitu $|r|$), namun berlawanan arah. Catatan: titik $(-r, \theta)$ menyatakan titik yang sama dengan titik $(r, \theta + \pi)$.

Berikut adalah contoh titik dan koordinat kutubnya.



Dalam sistem koordinat Kartesius, setiap titik hanya memiliki satu representasi. Namun dalam sistem koordinat kutub, setiap titik memiliki banyak representasi.



Karena satu putaran penuh dinyatakan oleh sudut 2π, maka titik (r, θ) dapat dinyatakan oleh

$$(r, \theta + 2n\pi) \text{ dan } (-r, \theta + (2n+1)\pi),$$

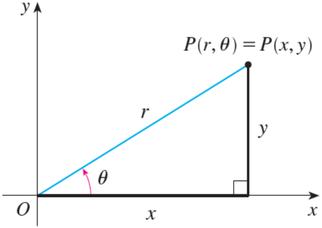
dengan $n \in \mathbb{Z}$.

Contoh Soal

Buatlah dalam koordinat kutub jika diketahui

9. titik $I(2, \frac{2\pi}{3})$.
10. titik $J(\sqrt{4}, -\frac{\pi}{4})$.
11. $r = 1$.
12. $\theta = \pi/3$.

Hubungan antara Sistem Koordinat Kartesius dan Koordinat Kutub



Jika titik P memiliki koordinat Kartesius (x, y) dan koordinat kutub (r, θ), maka

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \text{ dan } \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

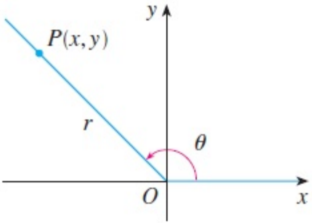
Sehingga berlaku

$$x = r\cos\theta, \text{ dan } y = r\sin\theta.$$

Walaupun persamaan tersebut diperoleh dari ilustrasi gambar bahwa $r > 0$ dan $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, namun juga berlaku untuk semua nilai r dan θ. Oleh karena itu, berlaku juga

$$r^2 = x^2 + y^2, \text{ dan } \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

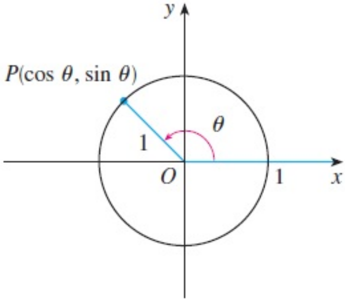
Dari gambar berikut,



diperoleh

$$\begin{aligned} \sin\theta &= y/r, & \csc\theta &= r/y \\ \cos\theta &= x/r, & \sec\theta &= r/x \\ \tan\theta &= y/x, & \cot\theta &= x/y. \end{aligned}$$

Jika jarak $|OP|$ diwakili oleh $r = 1$, maka koordinat titik P dalam gambar di bawah ini adalah $(\cos\theta, \sin\theta)$.



Contoh Soal

13. Ubah titik $(2, \frac{\pi}{3})$ dari koordinat kutub ke koordinat Kartesius!
Jawab:

Contoh Soal

13. Ubah titik $(2, \frac{\pi}{3})$ dari koordinat kutub ke koordinat Kartesius!
Jawab:

$$x = r\cos\theta = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\sin\theta = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Sehingga titik tersebut menjadi $(1, \sqrt{3})$ dalam koordinat Kartesius.

Contoh Soal

14. Representasikan titik koordinat Kartesius $(1, -1)$ ke dalam koordinat kutub!
Jawab:

Contoh Soal

14. Representasikan titik koordinat Kartesius $(1, -1)$ ke dalam koordinat kutub!
Jawab:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = -1.$$

Karena $(1, -1)$ berada dalam Kuadran IV, maka dapat dipilih $\theta = -\frac{\pi}{4}$ atau $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

Contoh Soal

15. Buatlah dalam koordinat kartesius jika diketahui $r = \frac{3}{\sin\theta}$!
Jawab:

Contoh Soal

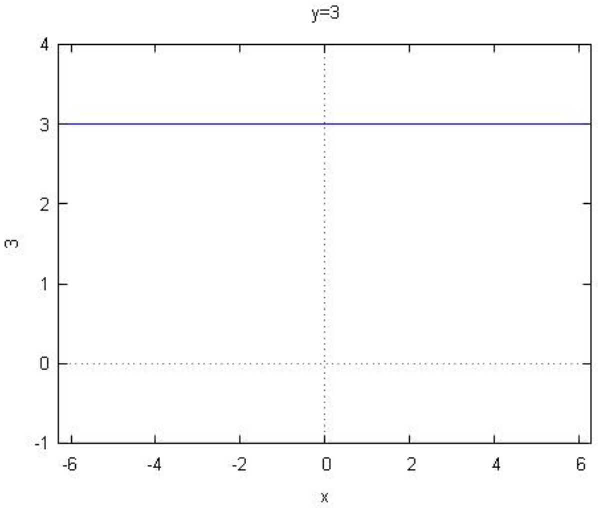
15. Buatlah dalam koordinat kartesius jika diketahui $r = \frac{3}{\sin\theta}$!
Jawab:

$$x = r\cos\theta = \frac{3\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$y = r\sin\theta = 3.$$

Atau dapat juga dibuktikan bahwa

$$r = \frac{3}{\sin\theta} \Rightarrow r\sin\theta = y = 3.$$

Namun nilai x tidak terdefinisi ketika $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.


y=3
4
3
2
1
0
-1
3
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

Hasil Kali Kartesian

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Hasil kali kartesian A dengan B adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, ditulis

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Misalkan $A = \{a, b\}$ dan $C = \{1, 2, 3\}$, maka

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}.$$

Himpunan ini bersifat terurut karena $(a, 1) \in A \times B$ namun $(1, a) \neq A \times B$.

Bidang XOY dapat dipandang sebagai hasil kali kartesian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dan dikenal sebagai sistem koordinat kartesius di $\mathbb{R}^2$.

Secara umum, hasil kali kartesian $A_1, A_2, \ldots, A_n$ didefinisikan sebagai

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

dinamakan $n-$pasangan terurut. Dalam kasus $A_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, himpunan ini dikenal sebagai sistem koordinat berdimensi n.

Relasi

Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan. Suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan bagian tak kosong dari hasil kartesian $A \times B$. Secara matematis ditulis

$$R \subseteq A \times B, R \neq \emptyset.$$

Pasangan (x, y) dari relasi R dapat ditulis dalam bentuk xRy, yang berarti x berelasi dengan y.

Domain dan *Range*

Daerah asal (*Domain*)

Domain relasi $R \subseteq A \times B$ adalah himpunan

$$D_R = \{x \in A : xRy, y \in B\}.$$

Daerah hasil (*Range*)

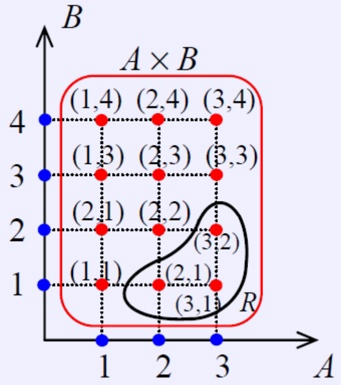
Range relasi $R \subseteq A \times B$ adalah himpunan

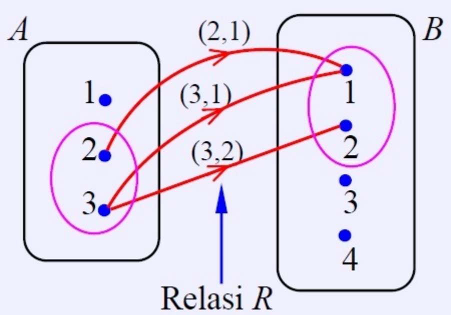
$$R_R = \{y \in B : xRy, x \in A\}.$$

Sebagai contoh, misalkan relasi R dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{1, 2, 3, 4\}$ dengan $R = \{(x, y) : x > y, x \in A, y \in B\}$ adalah

$$\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Maka, $D_R = \{2, 3\}$ dan $R_R = \{1, 2\}$.


B
A × B
(1,4) (2,4) (3,4)
(1,3) (2,3) (3,3)
(2,1) (2,2)
(3,2)
(1,1)
(2,1)
(3,1)
R
4
3
2
1
1 2 3
A


A
1
2
3
(2,1)
(3,1)
(3,2)
B
1
2
3
4
Relasi R

Fungsi

Fungsi $f : A \to B, f(x) = y$ dengan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $B \subseteq \mathbb{R}$, dinamakan fungsi real, adalah suatu aturan yang mengaitkan setiap anggota di himpunan A dengan **tepat satu** (satu dan hanya satu) anggota di B.

Himpunan A dinamakan daerah asal atau *domain* fungsi f, ditulis D_f. Elemen $y \in \mathbb{R}$ yang terkait dengan $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ dinamakan peta (*range*) dari x dan ditulis $f(x)$.

Elemen $x \in A$ dinamakan peubah bebas dan y yang bergantung dari x dinamakan peubah tak bebas. Himpunan semua $f(x)$ jika $x \in A$, dinamakan daerah nilai fungsi f dan ditulis R_f.

Lambang $y = f(x)$ yang menyatakan y terkait dengan x dinamakan aturan fungsi. Dalam kasus aturan fungsi $y = f(x)$ diberikan terlebih dahulu, maka *domain* fungsi f adalah

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) \in \mathbb{R}\}$$

dan daerah nilainya adalah

$$R_f = \{f(x) \in \mathbb{R} | x \in D_f\}.$$

Grafik fungsi (kurva) $y = f(x)$ adalah himpunan titik

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in D_f \text{ dan } y \in R_f\}.$$

Fungsi Surjektif

Fungsi Surjektif

Fungsi $f : A \to B, f(x) = y$ dikatakan surjektif jika $R_f = f(A) = B$. Sifat dari fungsi ini adalah

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \ni f(x) = y.$$

Fungsi Injektif

Fungsi Injektif

Fungsi $f : A \to B, f(x) = y$ dikatakan injektif jika

$$\forall u, v \in A,\ f(u) = f(v) \Rightarrow u = v.$$

Kondisi ini setara dengan

$$\forall u, v \in A, u \neq v \Rightarrow f(u) \neq f(v).$$

Fungsi Bijektif

Fungsi Bijektif

Fungsi $f : A \to B, f(x) = y$ dikatakan bijektif jika f fungsi surjektif dan injektif.

Contoh Soal

1. Jika diketahui

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Annisa, Baby, Claudia, Debby, Endah}\} \\ B &= \{\text{Samarinda, Balikpapan, Bontang}\}. \end{aligned}$$

   Tentukan $A \times B$!

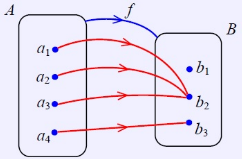
Contoh Soal

2. Misalkan diketahui:
    - Annisa dan Baby pernah pergi ke Samarinda dan Bontang.
    - Claudia dan Endah pernah pergi ke Samarinda dan Balikpapan.
    - Debby dan Claudia pernah pergi ke Samarinda dan Bontang.

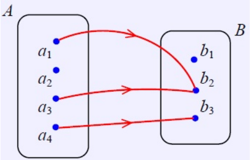
    Buatlah relasinya!

Contoh Soal

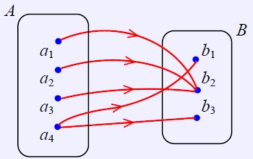
3. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi?



(a)



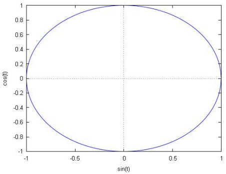
(b)



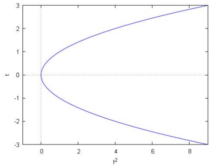
(c)

Contoh Soal

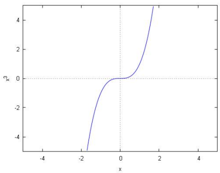
4. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi?



(a)



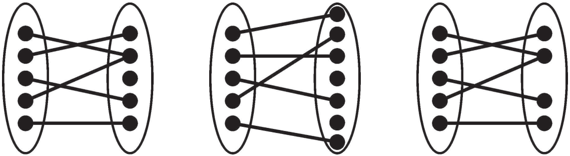
(b)



(c)

Contoh Soal

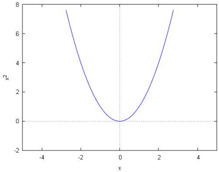
5. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi surjektif?



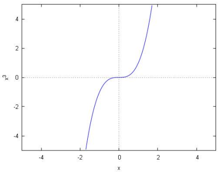
(a) (b) (c)

Contoh Soal

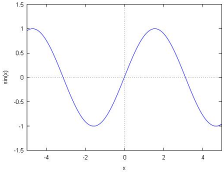
6. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi surjektif?



(a) $R_f = (-\infty, \infty)$



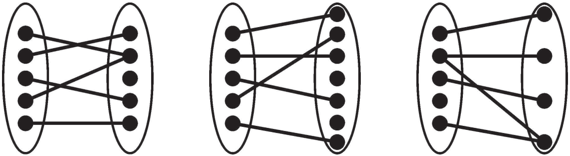
(b) $R_f = (-10, 10)$



(c) $R_f = (-10, 10)$

Contoh Soal

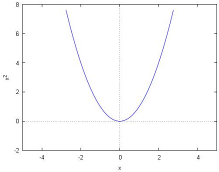
7. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif?



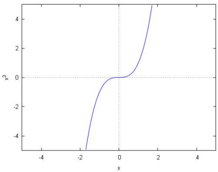
(a) (b) (c)

Contoh Soal

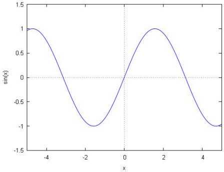
8. Dari gambar berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif?



(a)



(b)



(c)

Operasi Aljabar pada Fungsi

Untuk fungsi f dan g dengan $D_f = D_g = D$ berlaku

- Penjumlahan:
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \ \ \forall x \in D$
- Pengurangan:
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x) \ \ \forall x \in D$
- Perkalian:
  $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \ \ \forall x \in D$
- Pembagian:
  $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ \forall x \in D$ dan $g(x) \neq 0$.

Fungsi komposisi

Dua atau lebih fungsi dapat dioperasikan secara berurutan sehingga menghasilkan fungsi yang baru. Fungsi ini dinamakan fungsi komposisi. Artinya hasil dari fungsi pertama dilanjutkan ke fungsi ke dua, dan seterusnya.

Fungsi komposisi (2)

Misalkan

$$\begin{aligned} f : D_f &\rightarrow R_f \\ x &\rightarrowtail x^2 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} g : D_g &\rightarrow R_g \\ x &\rightarrowtail x+1, \end{aligned}$$

maka $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$
dan $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$.

Fungsi invers

Misalkan f adalah suatu fungsi injektif

$$f : D_f \to R_f,$$

maka fungsi invers (balikan) nya adalah

$$f^{-1} : R_f \to D_f.$$

Jika aturan fungsi f adalah $y = f(x)$, maka

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Arti fungsi invers adalah $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x, \ \forall x \in D_f$.

Fungsi genap

Jika $f(-x) = f(x) \forall x \in D_f$, maka f disebut fungsi genap. Fungsi ini simetri terhadap sumbu y. Contohnya, $y = f(x) = x^2$.

Fungsi ganjil

Jika $f(-x) = -f(x) \forall x \in D_f$, maka f disebut fungsi ganjil. Fungsi ini simetri terhadap titik asal $O(0, 0)$. Contohnya, $y = f(x) = x^3$.

Fungsi bilangan bulat terbesar

Di antara dua bilangan bulat, ada bilangan real $x \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$n \leq x < n + 1, \text{ untuk } n \in \mathbb{N}.$$

Fungsi $[x]$ adalah bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x. Dalam hal ini,

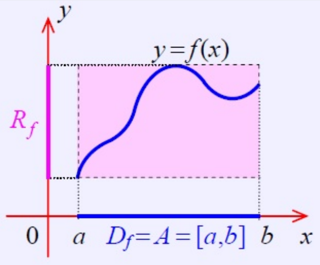
$$[x] = n \text{ jika } x \in [n, n+1).$$

Contohnya, $[1.8] = 1$, $[2] = 2$, $[-1.2] = -2$.

Grafik Fungsi

Himpunan semua pasangan $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dengan $y = f(x)$, $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ dan $y \in B \subseteq \mathbb{R}$, dinamakan **grafik fungsi** (kurva)

$$f : A \to B, f(x) = y.$$



Contoh Soal

9. Misalkan $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = 2x$. Tentukan:
   a) $(f \circ g)(x)$
   b) $g(f(x))$
   c) $f(g(1))$

Contoh Soal

10. Misalkan $f(x) = x^2$.
    a) Apakah fungsi f adalah injektif!
    b) Jika f merupakan fungsi injektif, maka tentukan inversnya!

Contoh Soal

11. Misalkan $f(x) = x^3$.
    a) Apakah fungsi f adalah injektif!
    b) Jika f merupakan fungsi injektif, maka tentukan inversnya!

12. Sketsalah grafik fungsi dari
    a) fungsi injektif
    b) fungsi surjektif
    c) fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Jawab:

$f(x=0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$

Limit

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?

Jawab:

$f(x=0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$

Lalu, apa yang terjadi ketika $x = 3$?

Limit

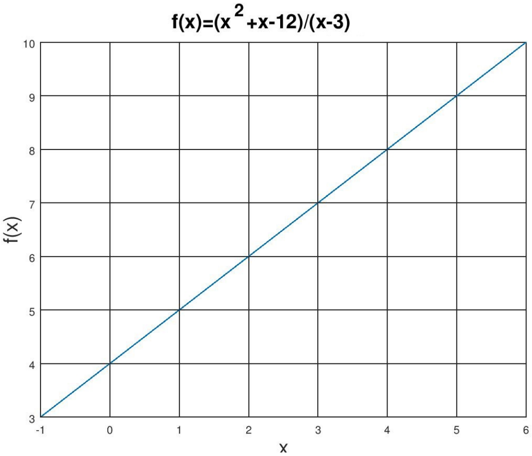
Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$. Berapakah nilai $f(0)$?
Jawab:
$f(x=0) = \frac{0^2+0-12}{0-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$

Lalu, apa yang terjadi ketika $x = 3$?

$$\begin{aligned} f(x=3) &= \frac{3^2+3-12}{3-3} \\ &= \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

x	$f(x)$
2,8	6,8
2,9	6,9
2,95	6,95
2,999	6,999
3	?
3,001	7,001
3,05	7,05
3,1	7,1
3,2	7,2

Namun berdasarkan tabel, dapat disimpulkan bahwa ketika x mendekati 3, maka $f(x)$ mendekati 7.


f(x)=(x^2+x-12)/(x-3)
f(x)
x
10
9
8
7
6
5
4
3
-1
0
1
2
3
4
5
6

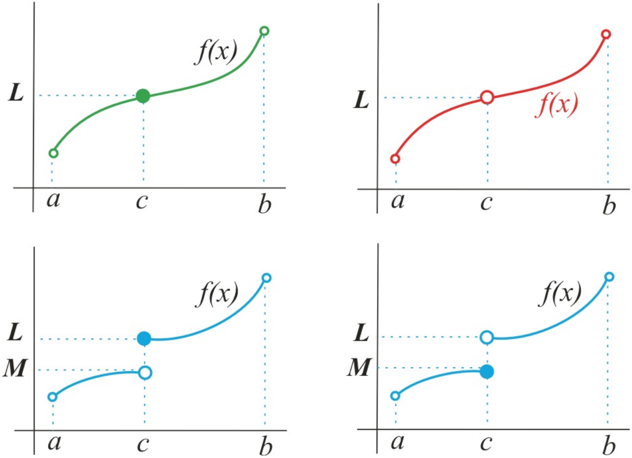
Misal diberikan interval selang buka $I = (a, b)$ pada $\mathbb{R}$ dan titik $c \in I$. Suatu fungsi f terdefinisi di I, namun titik c mungkin tidak terdefinisi (mungkin juga terdefinisi).

Misal diberikan interval selang buka $I = (a, b)$ pada $\mathbb{R}$ dan titik $c \in I$. Suatu fungsi f terdefinisi di I, namun titik c mungkin tidak terdefinisi (mungkin juga terdefinisi).

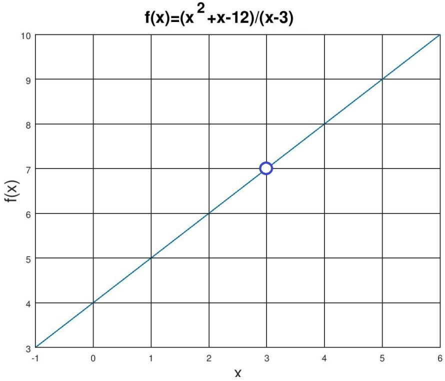
Perhatikan bahwa

$$0 < |x - c| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - c < \delta$$

merupakan himpunan semua bilangan Real x yang jaraknya ke titik c kurang dari δ. Dengan sifat kerapatannya, bisa diambil sampel bilangan-bilangan yang mendekati titik c tersebut. Istilah x mendekati c mengandung makna bahwa jarak antara titik x ke titik c semakin lama semakin kecil.


f(x)
L
a
c
b
f(x)
L
a
c
b
f(x)
L
M
a
c
b
f(x)
L
M
a
c
b

Misalkan fungsi $f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}$,
memiliki domain $D_f = \mathbb{R} - \{3\} = \mathbb{R} \backslash \{3\}$ seperti pada gambar berikut.



Intuisinya (berdasarkan pengalaman dari tabel), jika nilai sebelum $f(x = 3)$ dan setelah $f(x = 3)$ mendekati nilai sama, maka nilai $f(x = 3)$ dapat "ditebak".

Pertanyaannya,

1. berapa nilai δ_1 agar

$$0 < |x - 3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 7| < 1?$$

Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?

Pertanyaannya,

1. berapa nilai δ_1 agar

$$0 < |x-3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-7| < 1?$$

   Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?

2. berapa nilai δ_2 agar

$$0 < |x-3| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-7| < \frac{1}{1000000}?$$

Pertanyaannya,

1. berapa nilai δ_1 agar
$$0 < |x-3| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-7| < 1?$$
Apakah $\delta_1 = 3/4$ memenuhi?
2. berapa nilai δ_2 agar
$$0 < |x-3| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-7| < \frac{1}{1000000}?$$
3. misalkan ε bilangan positif sebarang, tentukan δ agar
$$0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x)-7| < \varepsilon?$$

Terlihat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, selalu dapat ditentukan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon.$$

Dikatakan

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7.$$

Misalkan nilai limit dari $f(x)$ untuk x mendekati titik c adalah L, maka dinotasikan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

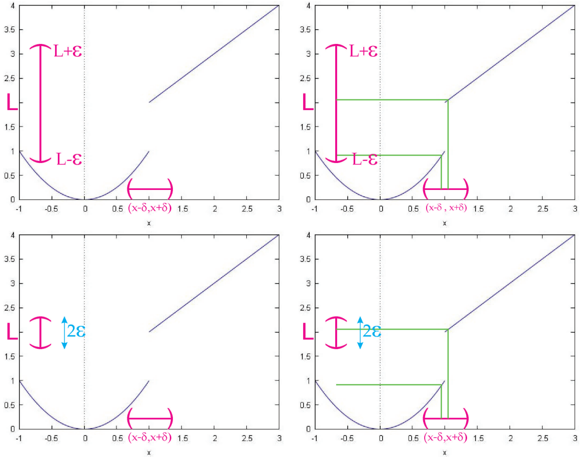
Artinya $\forall \varepsilon > 0$ dapat dicari $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

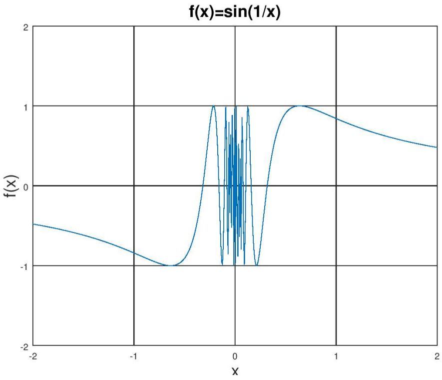
Arti ”mendekati” ini, bisa dari kiri titik c atau dari kanan titik c. Dengan kata lain, nilai limit $f(x)$ untuk x mendekati c ada, jika

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



Perhatikan bahwa fungsi berikut tidak memiliki limit di $x = 0$. Kenapa?



Sifat-sifat Limit

Misalkan f dan g adalah dua buah fungsi, dan $k \in \mathbb{R}$, maka

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} (kf)(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to c} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to c} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to c} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$

Sifat-sifat Limit

8. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = \left(\lim\limits_{x\to c} f(x)\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$
9. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)},\ \lim\limits_{x\to c} f(x) \geq 0$ untuk n genap
10. Jika $p(x)$ fungsi polinom, maka $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$
11. Teorema Apit (Teorema Sandwich).
    Misalkan f, g, h adalah tiga fungsi dengan
    $$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \ \ \forall x \in I.$$
    Jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c} h(x) = L$,
    maka $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$. Ilustrasikan secara grafik!

Sifat-sifat Limit

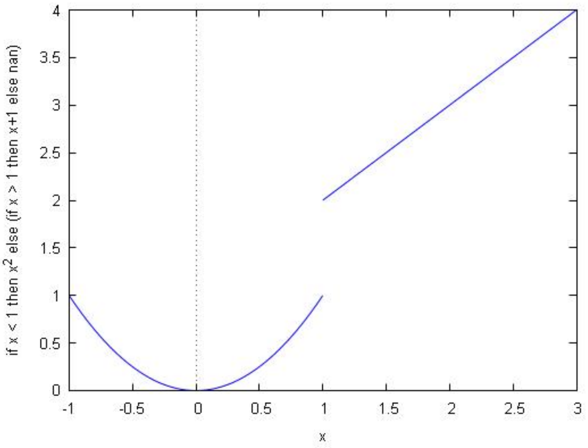
Sifat-sifat Limit Fungsi Trigonometri

- $\lim\limits_{x \to c} \sin x = \sin c$ dan $\lim\limits_{x \to c} \cos x = \cos c$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ dan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} = 1.$

Limit Satu Arah (limit satu sisi)

Perhatikan *piecewise function* atau *step function* berikut.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1. \end{cases}$$


if x < 1 then x^2 else (if x > 1 then x+1 else nan)
x
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Tentukan:

- δ_1 agar $0 < |x - 1| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2$!
- δ_2 agar $0 < |x - 1| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}$!
- δ_3 agar $0 < |x - 1| < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$!

Tentukan:

- δ_1 agar $x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2$!
- δ_2 agar $x - 1 < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}$!
- δ_3 agar $x - 1 < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$!

Tentukan:

- δ_1 agar $x - 1 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2$!
- δ_2 agar $x - 1 < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}$!
- δ_3 agar $x - 1 < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$!
- jika $\varepsilon > 0$, adakah δ agar $x - 1 < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$!

Tentukan:

- δ_1 agar $1 - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2$!
- δ_2 agar $1 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}$!
- δ_3 agar $1 - x < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$!

Tentukan:

- δ_1 agar $1 - x < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - 2| < 2$!
- δ_2 agar $1 - x < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{3}{2}$!
- δ_3 agar $1 - x < \delta_3 \Rightarrow |f(x) - 2| < \frac{1}{2}$!
- jika $\varepsilon > 0$, adakah δ agar $1 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$!

Definisi limit kanan

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kanan adalah L, dinotasikan

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L,$$

artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga

$$x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definisi limit kiri

Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c dari kiri adalah L, dinotasikan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L,$$

artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga

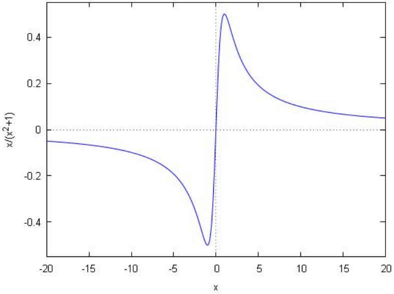
$$c - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Sifat-sifat

- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \Rightarrow \lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |L|$
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to c} |f(x)| = 0.$

Limit Menuju Takhingga

Perhatikan fungsi $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ berikut. Jika x terus meningkat tanpa batas, ditulis $x \to \infty$, maka nilai $f(x)$ cenderung menuju 0. Fenomena ini mendasari konsep limit di takhingga.



$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$ mendekati L jika x membesar tanpa batas.

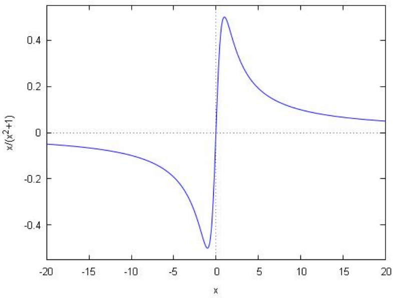
- $\Leftrightarrow$ jarak $f(x)$ ke L dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan positif jika x cukup besar.
- $\Leftrightarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika $x > m$ untuk suatu $m > 0$.
- $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow f(x)$ mendekati L jika x mengecil tanpa batas.

$\Leftrightarrow$ jarak $f(x)$ ke L dibuat lebih kecil dari sebarang bilangan positif jika x cukup kecil. (lebih kecil dari suatu bilangan negatif).

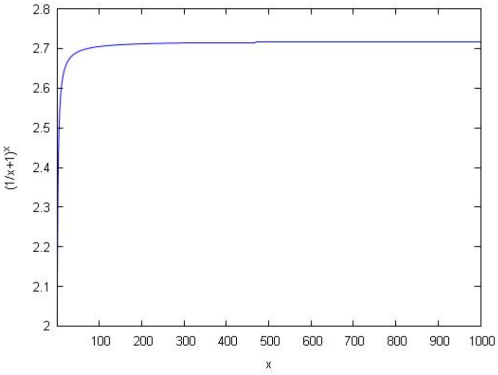
$\Leftrightarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon$ untuk sebarang $\varepsilon > 0$ jika $x < n$ untuk suatu $n < 0$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n < 0 \ni x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

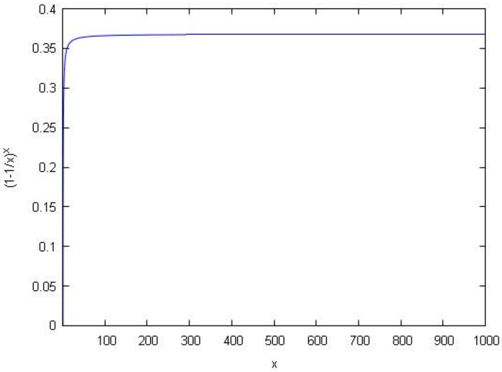


- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow x \to \infty \Rightarrow f(x) \to L$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists m > 0 \ni x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to L$
$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \exists n < 0 \ni x < n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

Misalkan $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = e$.



Misalkan $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$, maka $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{e}$.



Bentuk Tak Tentu Limit Fungsi

1. Bentuk $0/0$. Misal, $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to c} g(x)$.
2. Bentuk ∞/∞. Misal, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

Solusi untuk [1] dan [2] adalah mengubah bentuk pecahannya sehingga rumus limit dapat digunakan.

3. Bentuk $0 \cdot \infty$. Misal, $\lim_{x \to c} f(x)g(x)$, dengan $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$.
Solusi: Ubahlah bentuknya menjadi

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{1/g(x)} \text{ (bentuk 0/0) atau } \lim_{x \to c} \frac{g(x)}{1/f(x)} \text{ (bentuk } \infty/\infty)$$

4. Bentuk $\infty - \infty$. Misal, $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x))$, dengan $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ dan $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$.
Solusi: Ubahlah bentuknya menjadi ∞/∞.

Contoh Soal

1. Misalkan $k \in \mathbb{N}$. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^k}$!

   Jawab:

Contoh Soal

1. Misalkan $k \in \mathbb{N}$. Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^k}$!
   Jawab: 0

Contoh Soal

2. Misalkan $k \in \mathbb{Q}$ dan $k > 0$. Tentukan $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k}$!

   Jawab:

Contoh Soal

2. Misalkan $k \in \mathbb{Q}$ dan $k > 0$. Tentukan $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k}$!

   Jawab: 0

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x-6}$!

   Jawab:

Contoh Soal

3. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x-6}$!

   Jawab:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)} = \frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}$$

   $$= \frac{2-0}{1-0-6\cdot 0} = 2.$$

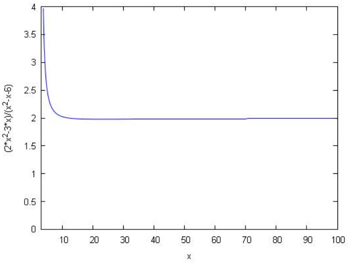
Contoh Soal

3. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x-6}$!

   Jawab:

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x}{x^2-x-6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)} = \frac{2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-6\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}$$

   $$= \frac{2-0}{1-0-6\cdot 0} = 2.$$

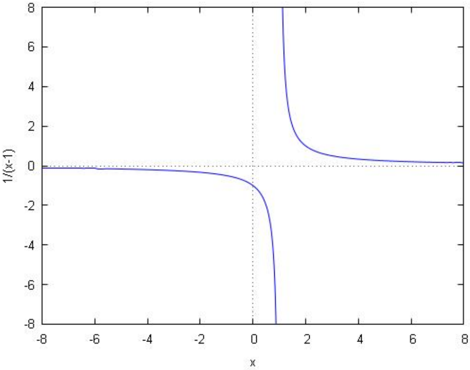


Contoh Soal

4. Sketsalah gambar $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Apakah limit $x \to 1$ ada?
   Jawab:

Contoh Soal

4. Sketsalah gambar $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Apakah limit $x \to 1$ ada?
   Jawab:



Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Tentukan $\lim_{x \to 0} f(x)$!

   Jawab:

Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \frac{x}{|x|}$. Tentukan $\lim_{x \to 0} f(x)$!

   Jawab:

   $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Contoh Soal

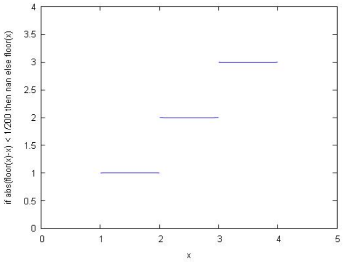
6. Misal diberikan fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = [x]$ yaitu bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x. Tentukan $\lim_{x \to 2} f(x)$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Misal diberikan fungsi bilangan bulat terbesar $f(x) = [x]$ yaitu bilangan bulat yang lebih kecil atau sama dengan x. Tentukan $\lim_{x \to 2} f(x)$!

   Jawab:



Contoh Soal

7. Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x+1, & x \in (1,2] \\ \log(x-2), & x > 2. \end{cases}$$

Tentukan:

a) $\lim_{x \to -1} f(x)$!
b) $\lim_{x \to 1} f(x)$!
c) $\lim_{x \to 2} f(x)$!

Contoh Soal

8. Tentukan $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4}$!
   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4}$!
   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} \frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

   Jawab:

   Misal $t = \sqrt{x^2+5}$, maka $x \to 2 \Leftrightarrow t \to 3$ dan $t^2 = x^2 + 5 \Leftrightarrow x^2 = t^2 - 5$.

Contoh Soal

9. Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$!

   Jawab:

   Misal $t = \sqrt{x^2+5}$, maka $x \to 2 \Leftrightarrow t \to 3$ dan $t^2 = x^2+5 \Leftrightarrow x^2 = t^2-5$. Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{t \to 3} \frac{4-(t^2-5)}{3-t} = \lim_{t \to 3} \frac{9-t^2}{3-t} \\ &= \lim_{t \to 3} \frac{(3+t)(3-t)}{3-t} = \lim_{t \to 3}(3+t) = 6.\end{aligned}$$

Contoh Soal

10. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{2x+1}$!

    Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{2x+1}$!

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \cdots$$

Contoh Soal

11. Tentukan $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x + 1}$!

Jawab:

Contoh Soal

11. Tentukan $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{2x+1}$!

    Jawab:

    $-\frac{1}{2}$

Contoh Soal

12. Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$!
Jawab:

Contoh Soal

12. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$!

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\frac{1}{x}\to 0^+}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1.$$

Contoh Soal

13. Tentukan $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)$!
    Jawab:

Contoh Soal

13. Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$!

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{1+1}=1\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Contoh Soal

14. Tentukan $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x} + x\right)$!

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan
    a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}$!
    b) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$!
    c) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}$!

Jawab:

Contoh Soal

15. Tentukan

   a) $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}$!

   b) $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$!

   c) $\lim_{x \to 0} (1 - x)^{-\frac{1}{x}}$!

   Jawab: e

Contoh Soal

16. Tentukan konstanta a dan b sedemikian sehingga
$\lim_{x\to 4} \frac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4} = \frac{3}{4}$!
Jawab:

Contoh Soal

16. Tentukan konstanta a dan b sedemikian sehingga $\lim_{x\to 4} \frac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4} = \frac{3}{4}$!

Jawab:

Misalkan

$$\frac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4} = \frac{(2-\sqrt{x})(c-d\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)},$$

maka $ax-\sqrt{x}+b = (2-\sqrt{x})(c-d\sqrt{x})$. Akibatnya $a = d$, $b = 2c$, dan $d = \frac{1-c}{2}$.

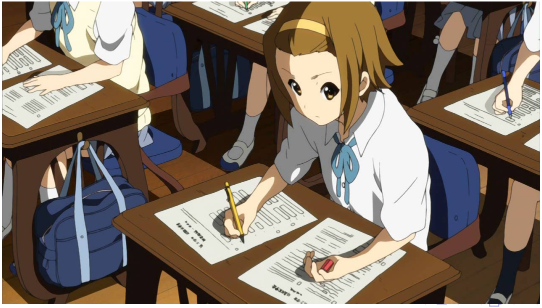
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{ax-\sqrt{x}+b}{x-4} &= \frac{3}{4}\\
\lim_{x\to 4} \frac{(2-\sqrt{x})(c-d\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} &= \frac{3}{4}\\
\lim_{x\to 4} -\frac{c-d\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} &= \frac{3}{4}\\
\frac{2d-c}{4} &= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Sehingga $d=\frac{3+c}{2}$. Namun karena $d=\frac{1-c}{2}$, maka $c=-1$. Oleh karena itu, diperoleh $a=1$ dan $b=-2$.

Alert

Ingat!

Minggu depan KUIS!



Kekontinuan

Misalkan fungsi $y = f(x)$ terdefinisi pada selang buka I yang memuat titik c. Maka fungsi f kontinu di c, jika

- grafik kurvanya tak terputus di titik c
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

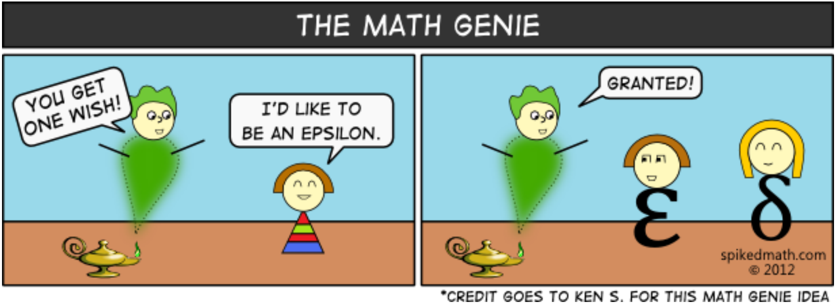
Definisi limit

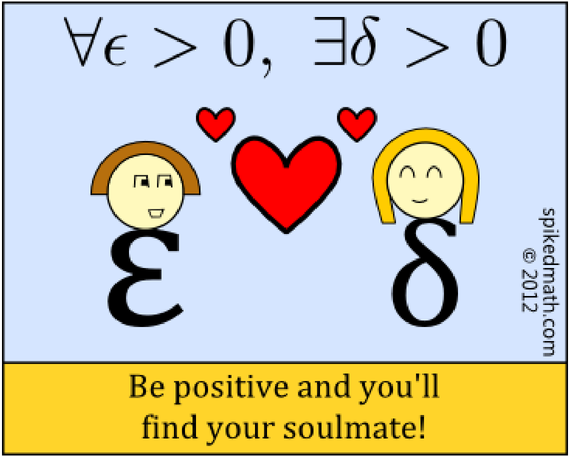
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definisi kontinu

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \ni |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Kenapa harus ada ε dan δ?

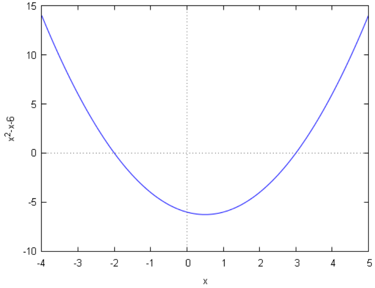



$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$
ε
δ
spikedmath.com
© 2012
Be positive and you'll
find your soulmate!

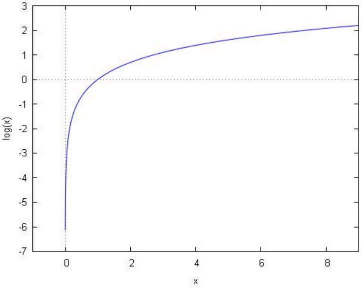
Fungsi f kontinu pada interval I jika grafiknya tidak terputus pada interval tersebut.

Fungsi f kontinu pada interval I jika grafiknya tidak terputus pada interval tersebut.

Fungsi f kontinu pada interval I, jika dapat digambar grafik fungsinya pada interval I tanpa harus mengangkat spidol dari papan tulis.



(a) $f(x) = x^2 - x - 6$ kontinu pada $\mathbb{R}$



(b) $f(x) = \log(x)$ kontinu pada $(0, \infty)$

Kontinu Kiri dan Kontinu Kanan

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $(a, c]$, maka f **kontinu kiri** di c jika

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c).$$

Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang $[c, b)$, maka f **kontinu kanan** di c jika

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$

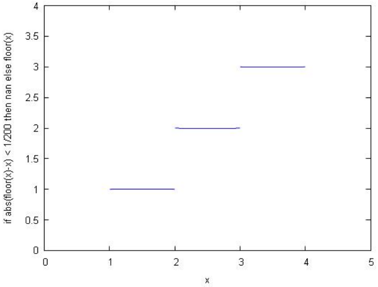
Fungsi f kontinu di titik c jika fungsi f kontinu kiri dan kontinu kanan di c.

Fungsi f dikatakan kontinu pada interval selang buka I jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik pada I.

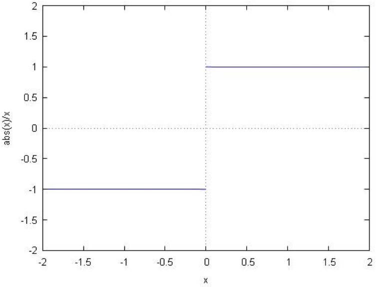
Fungsi f dikatakan kontinu pada interval selang buka I jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik pada I.

Fungsi f kontinu pada interval tutup $I = [a, b]$ jika dan hanya jika f kontinu di setiap titik $c \in (a, b)$, kontinu kanan di a, dan kontinu kiri di b.

Misalkan $f(x) = [x]$, $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$, dan $g(0) = 1$.



(a) $f(x)$ kontinu kanan $\forall x \in \mathbb{N}$



(b) $g(x)$ kontinu kanan di $x = 0$

Sifat-sifat Kontinu

Jika fungsi f dan fungsi g kontinu di $c \in I$, maka

- fungsi $f + g$ kontinu di titik c pada selang I
- fungsi $f - g$ kontinu di titik c pada selang I
- fungsi fg kontinu di titik c pada selang I
- fungsi $\frac{f}{g}$ kontinu di titik c pada selang I (dengan $g(c) \neq 0$)
- fungsi $|f|$ kontinu di titik c pada selang I

Fungsi-fungsi berikut kontinu pada domainnya:

- suku banyak
- fungsi rasional
- fungsi irasional
- trigonometri: sin, cos

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

maka $g \circ f$ kontinu di c, atau

$$\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(c) \Leftrightarrow \lim_{x \to c} (g(f(x))) = g(f(c)) = g\left(\lim_{x \to c} f(x)\right).$$

Jika fungsi f dan g memenuhi

- $R_f \subseteq D_g$
- f kontinu di $c \in D_f$
- g kontinu di $f(c) \in D_g$

maka $g \circ f$ kontinu di c, atau

$$\lim_{x\to c}(g \circ f)(x) = (g \circ f)(c) \Leftrightarrow \lim_{x\to c}(g(f(x))) = g(f(c)) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right).$$

Jika $\lim_{x\to c} f(x) = L$ dan fungsi g kontinu di L, maka

$$\lim_{x\to c}(g(f(x))) = g(L) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right).$$

Contoh Soal

1. Tentukan konstanta k agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x-k)^2, & x \leq 1 \\ kx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}$!
Jawab:

Contoh Soal

1. Tentukan konstanta k agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x-k)^2, & x \leq 1 \\ kx - 1, & x > 1 \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa

- fungsi $y = (x-k)^2$ kontinu pada $(-\infty, 1)$, dan
- fungsi $y = kx - 1$ kontinu pada $(1, \infty)$.

Agar fungsi f kontinu pada $\mathbb{R}$, maka fungsi f harus kontinu di $x = 1$. Dalam hal ini,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} (1-k)^2 = k - 1 &= (1-k)^2 \\ k^2 - 2k + 1 &= k - 1 \\ k^2 - 3k + 2 &= 0 \\ (k-1)(k-2) &= 0. \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $k = 1$ atau $k = 2$.

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!
   Jawab:

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

   Jawab:

   Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dan

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Contoh Soal

2. Tentukan syarat agar fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}, x \neq 1$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ kontinu di setiap $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ dan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2.$$

Maka syarat agar $f(x)$ kontinu pada $\mathbb{R}$ adalah mendefinisikan nilai $f(x=1) = 2$.

Contoh Soal

3. Tentukan konstanta a dan b agar fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu di setiap $x \in \mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

4. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, & x < -1 \\ 2, & -1 \leq x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ x+1, & x \in (1, 2] \\ \log(x-2), & x > 2. \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

5. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-8}{x-2}, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

6. Apakah fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 2 \\ x^2+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

kontinu pada $\mathbb{R}$!

Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-x-6}$ tidak kontinu!

   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 6}$ tidak kontinu!

   Jawab:

   Clue: tentukan di titik mana fungsi tersebut tidak terdefinisi.

Contoh Soal

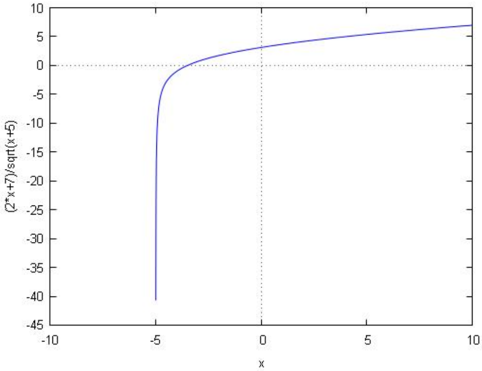
8. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \dfrac{2x+7}{\sqrt{x+5}}$ kontinu!

   Jawab:

Contoh Soal

8. Tentukan di titik mana fungsi $f(x) = \dfrac{2x+7}{\sqrt{x+5}}$ kontinu!

Jawab:

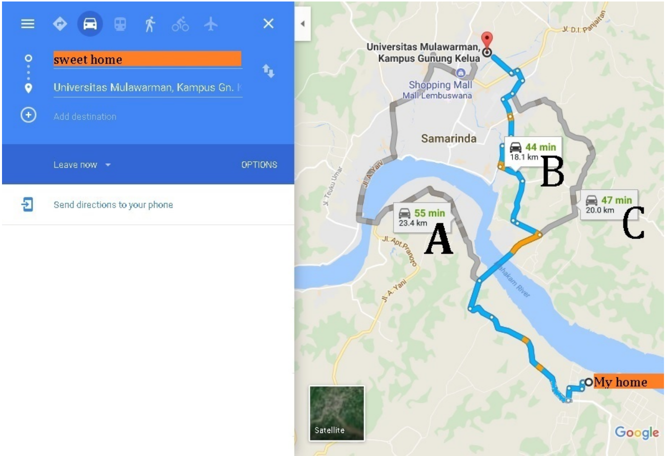


Prolog Turunan

Dua masalah dengan satu tema

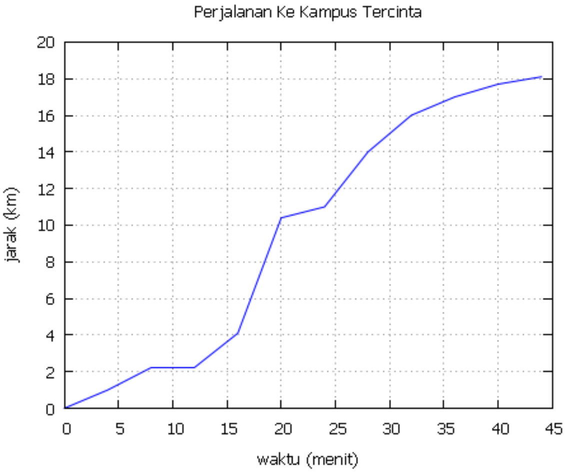
1. kelajuan sesaat?
2. masalah garis singgung?

Kelajuan sesaat



1. Jalur A:
   waktu = 55 menit, jarak = 23,4 km
2. Jalur B:
   waktu = 44 menit, jarak = 18,1 km
3. Jalur C:
   waktu = 47 menit, jarak = 20,0 km

Berapa kelajuan rata-ratanya?


Perjalanan Ke Kampus Tercinta
jarak (km)
waktu (menit)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:
   a. $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:
   a. $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit
   b. $t = 8$ sampai $t = 12$, maka $v = \frac{2,1-2,1}{12-8} = 0$ km per menit

1. Kelajuan rata-rata:

$$v = \frac{18,1}{44} \approx 0,41 \text{ km per menit.}$$

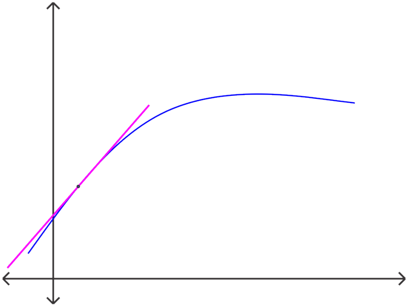
2. Kelajuan sesaat pada interval waktu:
   a. $t = 0$ sampai $t = 8$, maka $v = \frac{2,1-0}{8-4} = 0,525$ km per menit
   b. $t = 8$ sampai $t = 12$, maka $v = \frac{2,1-2,1}{12-8} = 0$ km per menit
   c. $t = 15$ sampai $t = 20$, maka $v = \frac{10,2-3,8}{25-20} = 1,28$ km per menit.

Masalahnya?

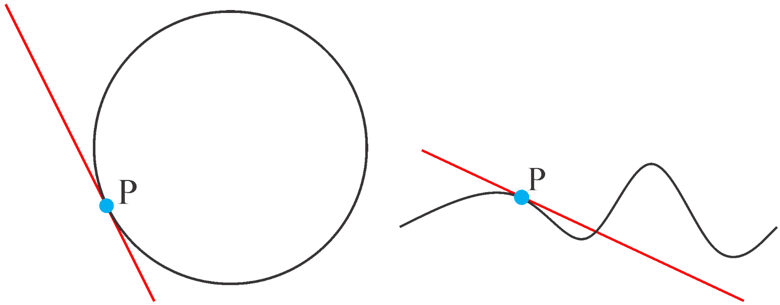
Kelajuan sesaat pada interval waktu tertentu, terlihat masih 'kasar' dalam perhitungannya.

Garis singgung

Euclides: ”garis singgung adalah garis yang menyentuh suatu kurva hanya pada satu titik”.



Kurva berikut tidak punya garis singgung?



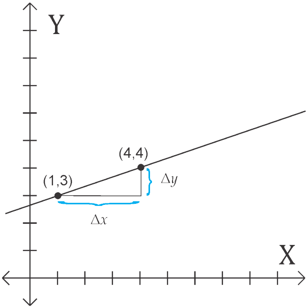
Masalahnya?

Definisi Euclid tentang garis singgung masih belum ’pas’.

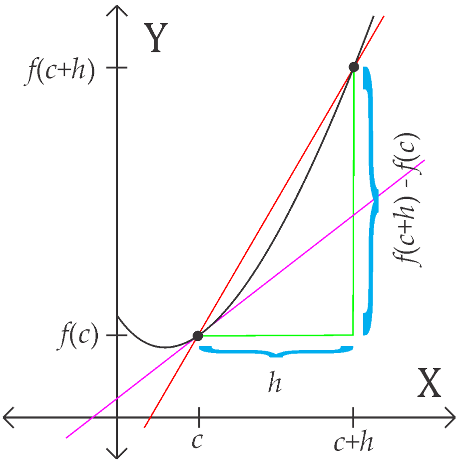
Ingat kembali rumus gradien*) pada suatu garis berikut:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Maka gradien dapat menyatakan laju perubahan y terhadap x.



*) mengacu konsep pada kelajuan sesaat.



Berapa gradien **garis singgung** di titik $x = c$?

Definisi Turunan

Definisi

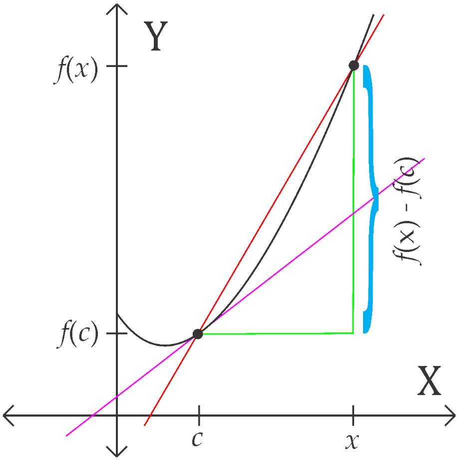
Misalkan f adalah fungsi, maka turunan dari fungsi f di titik c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}. \tag{3}$$

Misalkan $x = c + h$ disubtitusikan pada Persamaan (3), maka

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Jika limit ini ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan di $x = c$.


Y
f(x)
f(c)
f(x) - f(c)
X
c
x

Teorema

Jika $f'(c)$ ada maka f kontinu di c.

Bukti:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x)$ dapat ditulis menjadi

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), \quad x \neq c.$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x\to c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c).\end{aligned}$$

Kebalikan Teorema tersebut belum tentu berlaku.
Misalkan $f(x) = |x|$ maka ketika $x = 0$,

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

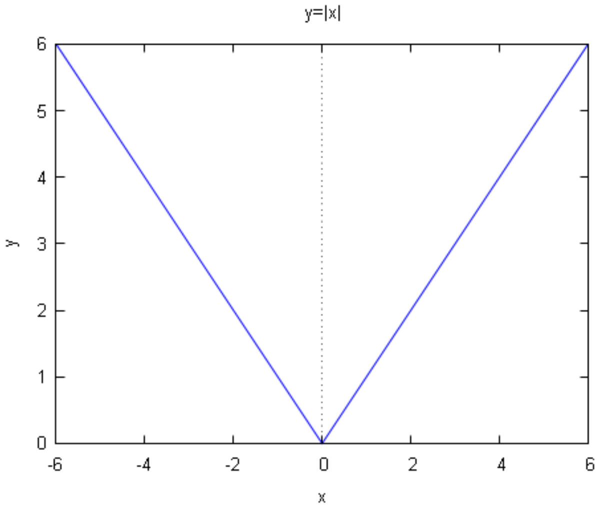
Sehingga

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1,$$

namun

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Oleh karena itu, $f'(x = 0)$ tidak ada.


y=|x|
6
5
4
3
2
1
0
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

Contoh Soal

1. Misalkan $f(x) = 13x - 6$, tentukan $f'(4)$!
Jawab:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[13(4+h)-6]-[13(4)-6]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{13h}{h} = \lim_{h\to 0} 13 = 13. \end{aligned}$$

Contoh Soal

2. Misalkan $f(x) = x^3 + 7x$, tentukan $f'(x)$!
Jawab:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^3 + 7(x+h)] - [x^3 + 7x]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 7h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 + 7) \\ &= 3x^2 + 7. \end{aligned}$$

Contoh Soal

3. Misalkan $f(x) = 2/(x+3)$, tentukan $f'(c)$!
   Jawab:

$$
\begin{aligned}
f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} &= \lim_{x \to c} \frac{\frac{2}{x+3} - \frac{2}{c+3}}{x - c} \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{2(c+3) - 2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right] \\
&= \lim_{x \to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c} \right] \\
&= \lim_{x \to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}.
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

4. Misalkan $f(x) = 3x^2 + 4$, tentukan $f'(x)$!
Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \cdots$$

Contoh Soal

5. Misalkan $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$, tentukan $f'(x)$!

   Jawab:

Contoh Soal

6. Misalkan $f(x) = \sqrt{2x}$, tentukan $f'(x)$!
   Jawab:

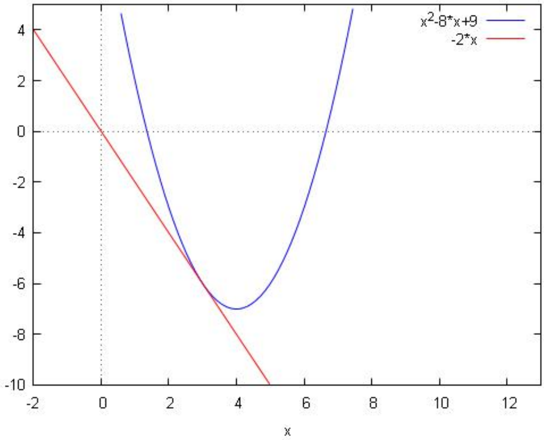
Contoh Soal

7. Tentukan garis singgung parabola $y = x^2 - 8x + 9$ di titik $(3, -6)$!
   Jawab:

Contoh Soal

7. Tentukan garis singgung parabola $y = x^2 - 8x + 9$ di titik $(3, -6)$!
   Jawab:
   $f'(c = 3) = \cdots$

$$\begin{aligned} y - f(c) &= f'(c)(x-3) \\ y + 6 &= f'(c)(x-3) \\ y &= \cdots . \end{aligned}$$


x^2-8*x+9
-2*x
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-2
0
2
4
6
8
10
12
x

Contoh Soal

8. Tentukan garis singgung parabola $y = 4x - 3x^2$ di titik $(2, -4)$!
   Jawab:

Contoh Soal

9. Tentukan garis singgung fungsi $y = x^3 - 3x + 1$ di titik $(2, 3)$!
Jawab:

Contoh Soal

10. Tentukan garis singgung fungsi $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$ di titik $(1,1)$!

Jawab:

Aturan Dasar

Berikut adalah beberapa aturan dasar:

1. $\frac{dk}{dx} = 0$, dengan k adalah konstanta
2. $\frac{d(kx^n)}{dx} = nkx^{n-1}$ untuk $n \in \mathbb{N}$ (**ingat:** hanya bil. Asli)
3. $\frac{d(g(x) \pm h(x))}{dx} = g'(x) \pm h'(x)$
4. $\frac{d(g(x) \cdot h(x))}{dx} = g(x)h'(x) + g'(x)h(x)$
5. $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$ (*The Quotient Rule*).

Turunan Fungsi Trigonometri

6. $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
7. $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$
8. $f(x) = \tan x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x$
9. $f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$
10. $f(x) = \cot x \Rightarrow f'(x) = -\csc^2 x$
11. $f(x) = \csc x \Rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$

Turunan Fungsi Trigonometri (2)

12. $f(x) = \sinh x \Rightarrow f'(x) = \cosh x$
13. $f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \sinh x$
14. $f(x) = \tanh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$
15. $f(x) = \operatorname{sech} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
16. $f(x) = \coth x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch}^2 x$
17. $f(x) = \operatorname{csch} x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{csch} x \coth x$

Aturan Tambahan

18. $\dfrac{d(|x|)}{dx} = \dfrac{|x|}{x}$
19. $\dfrac{d(\ln x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$
20. $\dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$
21. $\dfrac{d(^a\log x)}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a}$
22. $\dfrac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a$
23. $\dfrac{d(\sin^{-1} x)}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
24. $\dfrac{d(\cos^{-1} x)}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
25. $\dfrac{d(\tan^{-1} x)}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$
26. $\dfrac{d(\sec^{-1} x)}{dx} = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Contoh Soal

11. Misalkan $y = 2\sin x + 3\cos x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
Jawab:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(2\sin x + 3\cos x)}{dx} \\ &= \frac{d(2\sin x)}{dx} + \frac{d(3\cos x)}{dx} \\ &= 2\frac{d(\sin x)}{dx} + 3\frac{d(\cos x)}{dx} \\ &= 2\cos x - 3\sin x.\end{aligned}$$

Contoh Soal

12. Misalkan $y = 4\csc x + 4\sin x$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
Jawab:

Contoh Soal

13. Misalkan $y = \frac{1}{f(x)}$ dengan $f(x) \neq 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
Jawab:

Contoh Soal

14. Misalkan $f(x) = \begin{cases} m/x, & 0 < x < 1 \\ x^2 + nx, & x \geq 1, \end{cases}$.

    Tentukan m dan n sedemikian sehingga $f'(1)$ ada!

    Jawab:

Contoh Soal

15. Misalkan $y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$ dengan $\cos x \neq 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!

    Jawab:

Contoh Soal

16. Misalkan $y = \frac{x\cos x + \sin x}{x^2+1}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
Jawab:

Aturan Rantai

Misalkan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Jika g terdiferensialkan di x dan f terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka fungsi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ terdiferensialkan di x dan berlaku:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$.

Contoh Soal

17. Misalkan $y = \sin 3x$, tentukan dy/dx!
    Jawab:

Contoh Soal

18. Misalkan $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{100}$, tentukan $f'(x)$!
    Jawab:

Contoh Soal

19. Misalkan $z = \left(\frac{x^3-2x+1}{x^4+3}\right)^{13}$, tentukan $z' = \frac{dz}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

19. Misalkan $z = \left(\frac{x^3-2x+1}{x^4+3}\right)^{13}$, tentukan $z' = \frac{dz}{dx}$!

Jawab:

$$z' = 13\left(\frac{x^3-2x+1}{x^4+3}\right)^{12} \cdot \frac{-x^6+6x^4-4x^3+9x^2-6}{(x^4+3)^2}.$$

Contoh Soal

20. Tentukan $\dfrac{d(\sin^3(4x))}{dx}$!

Jawab:

Contoh Soal

20. Tentukan $\dfrac{d(\sin^3(4x))}{dx}$!

Jawab:

$$12\cos(4x)\sin^2(4x).$$

Contoh Soal

21. Misalkan $y = \left(\frac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$, tentukan $\frac{dy}{dx}$!
    Jawab:

Contoh Soal

22. Misalkan $y = 2\sin a$ dan $x = 2\sin 2a$, tentukan dy/dx!
    Jawab:

Contoh Soal

22. Misalkan $y = 2\sin a$ dan $x = 2\sin 2a$, tentukan dy/dx!
Jawab:

$$\frac{dy}{da} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{da} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{da}}{\frac{dx}{da}}$$
$$= \cdots .$$

Contoh Soal

23. Misalkan $y = 2a^2 + a$ dan $x = 3a + 1$, tentukan dy/dx!
Jawab:

Contoh Soal

23. Misalkan $y = 2a^2 + a$ dan $x = 3a + 1$, tentukan dy/dx!
Jawab:
Karena

$$\frac{dy}{da} = 4a + 1 \text{ dan } \frac{dx}{da} = 3,$$

maka $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4a+1}{3}$.